ГИА-9

Под редакцией
Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ
ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ГИА-2015

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ,
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКА

9 КЛАСС

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ГИА»

ЛЕГИОН

Учебные пособия издательства «Легион» допущены к использованию в образовательном процессе приказом Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009

Учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ГИА»

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

9 класс

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ГИА-2015

- ✓ Алгебра
- ✓ Геометрия
- ✓ Теория вероятностей и статистика

Учебно-методическое пособие

ЛЕГИОН
Ростов-на-Дону
2014

ББК 22.14
М34

Рецензенты:
Н. М. Резникова — учитель высшей категории,
Е. М. Фридман — учитель высшей категории,
Г. Л. Нужа — учитель высшей категории.

Авторский коллектив:
Лысенко Ф. Ф., Кулабухов С. Ю., Дерезин С. В., Евич Л. Н., Ольховая Л. С., Коннова Е. Г., Ханин Д. И..

М34 Математика. 9 класс. Тематические тесты для подготовки к ГИА-2015. Алгебра, геометрия, теория вероятностей и статистика: учебно-методическое пособие / Под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов н/Д: Легион, 2014. — 320 с. — (ГИА-9)

ISBN 978-5-9966-0595-8

Настоящее пособие предназначено для подготовки выпускников 9-х классов общеобразовательных учреждений к ГИА-2015 по математике.

В книге представлены 24 параграфа по всем темам, отражённым в спецификации государственной итоговой аттестации (ГИА-9), в том числе по геометрии, комбинаторике, теории вероятностей и математической статистике.

Каждый параграф включает основные теоретические сведения, демонстрационный вариант с решениями задач и 6 тренировочных вариантов. Внутри параграфа варианты расположены по возрастанию уровня сложности.

Пособие является частью учебно-методического комплекса **«Математика. Подготовка к ГИА»**.

Замечания и предложения, касающиеся данной книги, можно присылать по почте или на электронный адрес: legionrus@legionrus.com.

Обсудить пособия, оставить замечания и предложения, задать вопросы можно на форумах издательства http://f.legionr.ru, http://legion-posobiya.livejournal.com.

ББК 22.14
ISBN 978-5-9966-0595-8

Оглавление

Тематические тесты

§ 1. Приближённые значения. Округление чисел. Стандартный вид числа

Основные сведения

Правила округления. Если первая из отбрасываемых цифр больше или равна 5, то последняя из сохраняющихся цифр увеличивается на 1. Если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то последняя из сохраняемых цифр остаётся неизменной.

Если число округляют до какого-нибудь разряда, то все следующие за этим разрядом цифры заменяют нулями, а если они стоят после запятой, то их отбрасывают.

Стандартным видом положительного числа a называют его представление в виде $a_0 \cdot 10^m$, где $1 \leqslant a_0 < 10$, а m — целое число; число m называют **порядком числа** a, число a_0 — **мантиссой**.

Погрешностью приближения (абсолютной погрешностью) называют модуль разности между точным значением величины x и её приближённым значением a.

Если a — приближённое значение числа x и $|x - a| \leqslant h$, то говорят, что число x равно числу a с точностью до h, и пишут: $x = a \pm h$.

Неравенство $|x - a| \leqslant h$ можно записать в виде $a - h \leqslant x \leqslant a + h$. Числа $a-h$ и $a+h$ являются приближёнными значениями числа x **с недостатком** и **с избытком** соответственно.

Относительной погрешностью приближённого значения a называют отношение абсолютной погрешности $|x - a|$ к модулю приближённого значения. Относительную погрешность выражают в процентах $\frac{|x-a|}{|a|} \cdot 100\%$.

Демонстрационный вариант

1. Округлите число 57 497 до сотен.

1) 58 000 2) 58 497 3) 57 500 4) 60 000

Решение. При округлении числа 57 497 до сотен следует написать 57500. Действительно, за цифрой 4, обозначающей разряд сотен, следует цифра 9. Следовательно, 4 нужно увеличить на 1, а все цифры, стоящие правее данного разряда, заменить нулями. Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

2. Диаметр планеты Юпитер приближённо равен 142600 км. Как эта величина записывается в стандартном виде?

1) $1{,}426 \cdot 10^4$ км
2) $1{,}426 \cdot 10^2$ км
3) $1{,}426 \cdot 10^5$ км
4) $1{,}426 \cdot 10^6$ км

Решение. $142600 = 1,426 \cdot 10^5$. Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

3. Толщину одной и той же детали измерили штангенциркулем, микрометром и линейкой. Получили соответственно результаты 2,6 мм; 2,49 мм и 2 мм. Каким инструментом было произведено более точное измерение, если толщина детали равна 2,5 мм?

1) штангенциркулем
2) микрометром
3) линейкой
4) всеми инструментами

Решение. Найдём абсолютную погрешность для каждого из приведённых измерений:

1) при измерении штангенциркулем: $|2{,}6 - 2{,}5| = 0{,}1$;

2) при измерении микрометром: $|2{,}49 - 2{,}5| = 0{,}01$;

3) при измерении линейкой: $|2 - 2{,}5| = 0{,}5$.

Из чисел 0,1; 0,01 и 0,5 наименьшее — 0,01. Следовательно, более точное измерение было произведено микрометром. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

4. Запишите десятичную дробь, равную сумме $2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 10^{-4}$.

Решение. $2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 10^{-4} = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}001 + 7 \cdot 0{,}0001 =$ $= 0{,}2 + 0{,}003 + 0{,}0007 = 0{,}2037$.

Ответ: 0,2037.

5. Пусть a — приближённое значение числа b. Найдите относительную погрешность, если $a = 14{,}7$ и $b = 14{,}724$.

1) $\frac{8}{49}\%$ 2) $-0{,}024\%$ 3) $0{,}24\%$ 4) $-\frac{8}{49}\%$

Решение. $\frac{|b-a|}{|a|} \cdot 100\% = \frac{|14{,}724 - 14{,}7|}{14{,}7} \cdot 100\% = \frac{2{,}4}{14{,}7}\% = \frac{8}{49}\%$.

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

6. Температура t воздуха в холодильной камере $7{,}5°C$. В качестве приближённого значения взято число $7°C$. Найдите абсолютную погрешность приближения.

Решение. $|7{,}5 - 7| = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

7. Пусть $x = 12{,}7 \pm 0{,}2$. Из чисел
А $= 12{,}91$ Б $= 12{,}95$ В $= 12{,}501$ Г $= 12{,}52$
выберите возможные значения x.

1) А, В 2) А, Б 3) Б, В 4) В, Г

Решение. Запись $x = 12{,}7 \pm 0{,}2$ означает, что x равно 12,7 с точностью до 0,2, то есть $12{,}7 - 0{,}2 \leqslant x \leqslant 12{,}7 + 0{,}2$. Отсюда $12{,}5 \leqslant x \leqslant 12{,}9$. Полученному неравенству удовлетворяют только числа В и Г. Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

8. Укажите приближённое значение числа b, равное среднему арифметическому приближений с недостатком и с избытком, если $5{,}8 \leqslant b \leqslant 6{,}4$.

Решение. Числа 5,8 и 6,4 являются приближёнными значениями числа b с недостатком и с избытком соответственно. Среднее арифметическое этих чисел равно $\dfrac{5{,}8 + 6{,}4}{2} = 6{,}1$.

Ответ: 6,1.

Вариант № 1

1. Округлите число 253,355 до десятых.

1) 253,4 2) 253,3 3) 253,25 4) 253,26

2. Расстояние от планеты Земля до Солнца равно 149,6 млн км. Как эта величина записывается в стандартном виде?

1) $1{,}496 \cdot 10^6$км 2) $1{,}496 \cdot 10^7$км
3) $1{,}496 \cdot 10^8$км 4) $1{,}496 \cdot 10^9$км

3. Велосипедист проехал дистанцию 47 км со средней скоростью 9 км/ч. За сколько минут велосипедист преодолел дистанцию? Ответ округлите до целых.

Ответ: ________________.

4. Выразите дробь $\dfrac{5}{11}$ приближённой десятичной дробью с тремя знаками после запятой.

Ответ: ________________.

5. Пусть a — приближённое значение числа b. Найдите относительную погрешность, если $a = 230$, $b = 234{,}5$.

1) $\frac{2}{9}\%$ 2) $-\frac{45}{23}\%$ 3) $\frac{45}{23}\%$ 4) $-4{,}5\%$

6. Запишите десятичную дробь, равную сумме $5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2}$.

Ответ: ________________.

7. Пусть $x = 24{,}71 \pm 1{,}2$. Из чисел
А $= 24{,}73$, Б $= 26{,}71$, В $= 23{,}21$, Г $= 25{,}91$
выберите возможные значения x.

1) А, В 2) А, Г 3) Б, В 4) В, Г

8. Укажите приближённое значение числа a, равное среднему арифметическому приближений с недостатком и с избытком, если
$17{,}13 \leqslant a \leqslant 17{,}21$.

Ответ: ________________.

Вариант № 2

1. Округлите число 283,657 до сотых.

Ответ: ________________.

2. Найдите десятичную дробь, равную $21{,}35 \cdot 10^{-6}$.

1) 0,02135 2) 0,002135 3) 0,00002135 4) 0,0000002135

3. Общее количество биомассы Мирового океана оценивается в 35 миллиардов тонн. Как эта величина записывается в стандартном виде?

1) $35 \cdot 10^6$ т 2) $35 \cdot 10^9$ т 3) $3{,}5 \cdot 10^8$ т 4) $3{,}5 \cdot 10^{10}$ т

4. Запишите десятичную дробь, равную сумме $6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2}$.

Ответ: ________________.

5. На рулетке написано: $l = 5{,}2 \pm 0{,}015$ м. Как это условие можно записать в виде двойного неравенства?

1) $4{,}995 \leqslant l \leqslant 5{,}215$ 2) $5{,}185 \leqslant l \leqslant 5{,}315$
3) $5{,}195 \leqslant l \leqslant 5{,}215$ 4) $5{,}185 \leqslant l \leqslant 5{,}215$

6. Технические данные настольных «быстрых» весов допускают погрешность при взвешивании не более $\pm 0{,}04$ кг. Какой может быть масса взвешиваемого продукта при данном условии, если требуется взвесить 1 кг?

1) 1,4 кг 2) 1,05 кг 3) 0,97 кг 4) 0,94 кг

7. На коробке с тортом имеется надпись, гарантирующая, что масса торта равна 500 ± 12 г. Какую массу при этом условии не может иметь торт?

1) 486 г 2) 507 г 3) 512 г 4) 499 г

8. При $x = -0{,}3$ найдите значения выражений $M = 0{,}4x$, $N = -x^2$ и $P = \dfrac{0{,}1}{x}$ и расположите их в порядке возрастания.

1) P, M, N 2) M, N, P 3) N, M, P 4) M, P, N

Вариант № 3

1. Округлите число 3210,2878 до тысячных.

1) 3000 2) 3210,3 3) 3210,29 4) 3210,288

2. Площадь бассейна реки Амур составляет 1855 тыс. км^2. Как эта величина записывается в стандартном виде?

1) $1{,}855 \cdot 10^3$ км^2 2) $1{,}855 \cdot 10^4$ км^2
3) $1{,}855 \cdot 10^5$ км^2 4) $1{,}855 \cdot 10^6$ км^2

3. Мальчик на вопрос о том, сколько километров составляет расстояние между Москвой и Петербургом, ответил: «675 км», а девочка ответила: «630 км». Какой ответ точнее, если расстояние между городами 650 км?

Ответ: ________________.

4. Запишите десятичную дробь, равную сумме $3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3}$.

Ответ: ________________.

5. Пусть a — приближённое значение числа b. Найдите относительную погрешность, если $a = 15{,}3$; $b = 15{,}347$.

1) $-\dfrac{47}{153}\%$ 2) 0,47% 3) −0,047% 4) $\dfrac{47}{153}\%$

6. Длина отрезка ℓ равна 15 см. В качестве приближённого значения длины взято число 15,5 см. Найдите абсолютную погрешность приближения.

Ответ: ________________.

7. Пусть $x = 8,7 \pm 0,4$. Из чисел

А) 8,223 Б) 8,341 В) 9,023 Г) 9,2

выберите возможные значения x.

1) А, В 2) Б, В 3) Б, Г 4) В, Г

8. Укажите приближённое значение числа m, равное среднему арифметическому приближений с недостатком и с избытком, если $3{,}9 \leqslant m \leqslant 4{,}3$.

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. Округлите число 4218,9 до десятков.

1) 4219 2) 4220 3) 42000 4) 4000

2. Запишите число 0,000218 в стандартном виде.

1) $21{,}8 \cdot 10^{-5}$ 2) $0{,}218 \cdot 10^{-3}$ 3) $2{,}18 \cdot 10^{-4}$ 4) $218 \cdot 10^{-6}$

3. Найдите приближённо разность чисел $a = 67{,}1234$ и $b = -22{,}6789$, округлив её с точностью до сотых.

1) 44,44 2) 44,0 3) 89,80 4) 89,802

4. Запишите десятичную дробь, равную сумме $7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-3}$.

Ответ: ________________.

5. Пусть a — приближённое значение числа b. Найдите относительную погрешность, если $a = 27{,}4$ и $b = 27{,}418$.

1) $-0{,}18\%$ 2) $\frac{9}{137}\%$ 3) $-\frac{9}{137}\%$ 4) $0{,}18\%$

6. Округлите число a до третьей значащей цифры, если $a = 3{,}75231$.

Ответ: ________________.

7. Пусть $z = 9{,}2 \pm 0{,}3$. Из чисел

А = 9,3 Б = 9,7 В = 8,96 Г = 8,17

выберите возможные значения z.

1) Б, Г 2) А, Б 3) А, Г 4) А, В

8. Укажите приближённое значение числа k, равное среднему арифметическому приближений с недостатком и с избытком, если $4{,}1 \leqslant k \leqslant 4{,}3$.

Ответ: ________________.

Вариант № 5

1. Округлите число 12346 до сотен.

1) 10000 2) 12000 3) 12300 4) 12350

2. Стандартный вид числа 0,000801 имеет представление:

1) $8{,}01 \cdot 10^{-4}$ 2) $0{,}801 \cdot 10^{-3}$ 3) $0{,}0801 \cdot 10^{-2}$ 4) $801 \cdot 10^{-6}$

3. Марина на уроке литературы сказала: «Расстояние от Простоквашино до Грибного — 1796 м», а Маша её поправила: «Нет, расстояние между этими населёнными пунктами — 1801 м». Какой ответ точнее: 1796 м или 1801 м, если расстояние — 1799 м?

Ответ: ________________.

4. Запишите десятичную дробь, равную сумме $4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$.

Ответ: ________________.

5. Запишите десятичную дробь, равную $\frac{27}{4}$. Ответ округлите до десятых.

Ответ: ________________.

6. Известно, что $a + b \approx 8{,}8$. Определите погрешность приближения, если $a = 21{,}567$, $b = -12{,}78$.

1) 0,013 2) −0,013 3) 0,13 4) −0,13

7. Масса m макарон в пакете 0,8 кг. В качестве приближённого значения взята масса 0,9 кг. Найдите абсолютную погрешность приближения.

Ответ: ________________.

8. Укажите все значения, которые может принимать число x, если его приближённое значение равно 7,13, а абсолютная погрешность равна 0,04.

1) $-7{,}09 \leqslant x \leqslant 7{,}09$ 2) $7{,}09 \leqslant x \leqslant 7{,}17$
3) $-7{,}17 \leqslant x \leqslant 7{,}17$ 4) $-7{,}13 \leqslant x \leqslant 7{,}13$

Вариант № 6

1. Найдите десятичную дробь, равную $\frac{9}{750}$.

Ответ: ________________.

2. Округлите число 82,376 до десятых.

1) 80 2) 82,3 3) 82,4 4) 82,38

3. Стоимость автомобиля равна 200 000 руб. ± 50 000 руб. в зависимости от модификации. Какую цену не может заплатить покупатель при указанном условии?

1) 230 000 2) 200 000 3) 280 000 4) 180 000

4. Стандартный вид числа 0,000 004 1 имеет представление:

1) $0{,}041 \cdot 10^{-4}$ 2) $0{,}41 \cdot 10^{-5}$ 3) $4{,}1 \cdot 10^{-6}$ 4) $41 \cdot 10^{-7}$

5. Абсолютная погрешность измерений, сделанных с помощью весов, не более 1,6 г. Взвесили сахар. Весы показали 550 г. Какую массу в действительности не может иметь этот сахар?

1) 551 г 2) 551,7 г 3) 548,7 г 4) 550 г

6. Найдите сумму целых чисел, между которыми заключено число $4\sqrt{11}$.

Ответ: ________________.

7. Запишите десятичную дробь, равную сумме $8 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3}$.

Ответ: ________________.

8. Площадь Васиной квартиры составляет 65 м^2. Выразите эту площадь в км^2.

1) 0,006 5 км^2 2) 0,000 65 км^2
3) 0,000 065 км^2 4) 0,000 006 5 км^2

§ 2. Отношения. Пропорции

Основные сведения

Отношение двух чисел — это частное от деления одного из них на другое. Отношение показывает, во сколько раз первое число больше второго или какую часть первое число составляет от второго.

Если значения двух величин выражены разными единицами измерения, то для нахождения отношения этих величин надо предварительно перейти к одной единице измерения.

Взаимно обратными называют числа, произведение которых равно 1 $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1, \text{ где } a \neq 0,\ b \neq 0\right)$.

Обратное отношение — это отношение, взятое в обратном порядке по отношению к данному.

Отношение $\frac{b}{a}$ называют обратным отношению $\frac{a}{b}$.

Пропорция — это равенство двух отношений.

В пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (или $a : b = c : d$) числа a и d называют **крайними**, а числа b и c — **средними** членами пропорции.

Основное свойство пропорции. В верной пропорции произведение крайних членов равно произведению её средних членов.
Если для двух отношений $a : b$ и $c : d$ выполняется равенство $ad = bc$, то $a : b = c : d$ — верная пропорция.

Если в верной пропорции поменять местами средние или крайние члены, то получившиеся новые пропорции верны.

Демонстрационный вариант

1. Найдите число, взаимно обратное с числом $\frac{7}{9}$.

1) $-\frac{7}{9}$ 2) $1\frac{2}{7}$ 3) 0,8 4) 1,4

Решение. Числом, обратным к $\frac{7}{9}$, является $\frac{9}{7} = 1\frac{2}{7}$. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

2. Масса печенья 15 кг, а масса упаковки 600 г. Найдите отношение массы печенья к массе упаковки.

1) $\frac{15}{600}$ 2) $\frac{5}{6}$ 3) $\frac{1}{25}$ 4) 25

Решение. 600 г = 0,6 кг. Отношение массы печенья к массе упаковки равно $\frac{15}{0{,}6} = \frac{150}{6} = 25$.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

3. Из каких отношений

А = 4,8 : 0,9; Б = 1,6 : 0,3; В = 0,48 : 0,9; Г = 25 : 12

можно составить пропорцию?

1) А и Б 2) Б и В 3) А и В 4) Б и Г

Решение. Проверим предложенные отношения на выполнение основного свойства пропорции.

1) Для отношений А и Б произведение крайних членов $4{,}8 \cdot 0{,}3 = 1{,}44$; произведение средних членов $0{,}9 \cdot 1{,}6 = 1{,}44$; $1{,}44 = 1{,}44$. Следовательно, из этих отношений можно составить пропорцию.

2) Для отношений Б и В произведение крайних членов $1{,}6 \cdot 0{,}9 = 1{,}44$; произведение средних членов $0{,}3 \cdot 0{,}48 = 0{,}144$; $1{,}44 \neq 0{,}144$. Следовательно, из этих отношений нельзя составить пропорцию.

3) Для отношений А и В произведение крайних членов $4{,}8 \cdot 0{,}9 = 4{,}32$; произведение средних членов $0{,}9 \cdot 0{,}48 = 0{,}432$; $4{,}32 \neq 0{,}432$. Следовательно, из этих отношений нельзя составить пропорцию.

4) Для отношений Б и Г произведение крайних членов $1{,}6 \cdot 12 = 19{,}2$; произведение средних членов $0{,}3 \cdot 25 = 7{,}5$; $19{,}2 \neq 7{,}5$. Следовательно, из этих отношений нельзя составить пропорцию.

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

4. Из пропорции 20 : 15 = 16 : 12 составлены 4 равенства, укажите верное.

1) 15 : 20 = 16 : 12 2) 20 : 12 = 15 : 16

3) 12 : 16 = 15 : 20 4) 20 : 16 = 12 : 15

Решение. Заданная пропорция останется верной, если в ней поменять местами средние или крайние члены. Следовательно, из предложенных пропорций верной является только 3).

Ответ: 3.

5. Найдите неизвестный член пропорции $\frac{0{,}9}{5} = \frac{1{,}8}{x}$.

Решение. По правилу нахождения крайнего члена пропорции $x = \frac{1,8 \cdot 5}{0,9} = 10$.

Ответ: 10.

6. На пошив 9 рубашек ушло 18,9 м ткани. Сколько метров такой же ткани потребуется на пошив 15 рубашек?

1) 27 2) 35 3) 31,5 4) 30

Решение. Пусть на пошив 15 рубашек требуется x м ткани. Тогда, согласно условию,

9 рубашек — 18,9 м;

15 рубашек — x м.

Так как расход ткани **прямо пропорционален** количеству рубашек, то справедливо равенство $\frac{9}{15} = \frac{18,9}{x}$. По правилу нахождения крайнего члена пропорции $x = \frac{15 \cdot 18,9}{9} = 31,5$.

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

7. С помощью 6 одинаковых труб бассейн заполняется водой за 32 минуты. За сколько минут можно заполнить бассейн с помощью 8 таких труб?

1) 36 2) 42 3) 64 4) 24

Решение. Пусть с помощью 8 труб бассейн можно заполнить за x минут. Тогда, согласно условию,

6 труб — 32 мин;

8 труб — x мин.

Так как время заполнения бассейна **обратно пропорционально** количеству труб, то справедливо равенство $6 : 8 = x : 32$. По правилу нахождения среднего члена пропорции $x = \frac{6 \cdot 32}{8} = 24$.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

8. Угол в 140° разделён на 4 части, градусные меры которых относятся как $2 : 3 : 4 : 5$. Найдите градусную меру меньшего из полученных углов.

1) 10° 2) 20° 3) 70° 4) 120°

Решение. Пусть x — градусная мера одной части. Тогда градусные меры углов соответственно равны $2x$, $3x$, $4x$ и $5x$. Следовательно, $2x + 3x + 4x + 5x = 140$; $14x = 140$; $x = 10$; 10° приходится на одну часть. Градусная мера меньшего из полученных углов равна $2 \cdot 10° = 20°$. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

Вариант № 1

1. Найдите число, взаимно обратное числу $-\frac{3}{5}$.

1) $\frac{3}{5}$ 2) $-\frac{12}{5}$ 3) $\frac{5}{3}$ 4) $-\frac{5}{3}$

2. Ширина комнаты 3,2 м, а длина — 480 см. Найдите отношение ширины комнаты к её длине.

1) $\frac{2}{3}$ 2) $\frac{3}{2}$ 3) $\frac{384}{25}$ 4) $\frac{25}{384}$

3. Выберите пару отношений, из которых можно составить пропорцию.

1) $\frac{15}{3}$ и $\frac{5}{0{,}3}$ 2) $\frac{14}{4}$ и $\frac{0{,}7}{0{,}2}$ 3) $\frac{11}{10}$ и $\frac{10}{11}$ 4) $\frac{2{,}3}{4{,}6}$ и $\frac{1}{4}$

4. Найдите неизвестный член пропорции $\frac{5{,}4}{x} = \frac{2{,}7}{2{,}1}$, используя её основное свойство.

Ответ: ________________ .

5. Выберите отношение b к a, если $1{,}5b = 3{,}2a$.

1) $\frac{b}{a} = \frac{24}{5}$ 2) $\frac{b}{a} = \frac{5}{24}$ 3) $\frac{b}{a} = \frac{1{,}5}{3{,}2}$ 4) $\frac{b}{a} = \frac{3{,}2}{1{,}5}$

6. Для участия в соревнованиях класс разбили на четыре равные команды. При этом в первую команду попали только девочки, во вторую и третью — только по одному мальчику (остальные девочки), а в четвёртую — две девочки (остальные мальчики). Найдите, какую часть составляют девочки от количества всех учеников в классе.

Ответ: ________________ .

7. 18 одинаковых деталей весят 286 кг. Сколько кг весят 45 таких же деталей?

Ответ: ________________ .

8. 12 одинаковых станков выполняют заказ за 17 часов. За сколько часов выполнят заказ 34 таких станка?

Ответ: ________________ .

Вариант № 2

1. Земельный участок площадью 210 га засеян семенами подсолнечника и льна. Площади под засев относятся как 4 : 3 соответственно. Какая площадь отведена под лён (в га)?

1) 150 2) 60 3) 120 4) 90

2. Неизвестный член пропорции $3{,}6 : x = \frac{1}{5} : \frac{4}{9}$ равен

1) 18 2) 0,32 3) 8 4) другой ответ

3. Найдите число, взаимно обратное числу $1\frac{2}{3}$.

Ответ: ________________.

4. Для пайки изделий из жести применяют сплав, состоящий из свинца и олова в отношении 2 : 5. Сколько понадобится олова для приготовления 350 г сплава?

Ответ: ________________.

5. Чтобы сшить 5 брюк, требуется 6 м ткани. Сколько таких брюк получится из 9,6 м этой ткани?

1) 7 2) 8 3) 9 4) 6

6. Масштаб карты 1 : 900000. Чему равно расстояние между городами (в км), если на карте оно составляет 5 см?

Ответ: ________________.

7. Один метр ткани стоит x рублей. Сколько копеек стоит y сантиметров этой ткани?

1) $\frac{xy}{10}$ 2) $100xy$ 3) $\frac{xy}{100}$ 4) xy

8. Кочан капусты на $\frac{4}{5}$ кг тяжелее $\frac{4}{5}$ этого же кочана. Какова масса кочана капусты (в кг)?

Ответ: ________________.

Вариант № 3

1. Найдите число, взаимно обратное числу $\frac{5}{4}$.

1) $1\frac{1}{4}$ 2) $-\frac{4}{5}$ 3) 0,8 4) $1\frac{1}{5}$

2. Масса конфет 2 кг, а масса печенья — 800 г. Найдите отношение массы печенья к массе конфет.

1) $\frac{800}{2}$ 2) $\frac{2}{800}$ 3) $\frac{20}{8}$ 4) $\frac{2}{5}$

3. Из каких отношений

А $= 1{,}2 : 10$; Б $= 8{,}4 : 14$; В $= 0{,}75 : 6\frac{1}{4}$; Г $= 8{,}4 : 1{,}4$

можно составить пропорцию?

1) А и Г 2) Б и В 3) А и В 4) Б и Г

4. Известно, что $\frac{4{,}5}{x} = \frac{3}{5}$, тогда x равен

Ответ: ________________.

5. Выберите отношение b к a, если $1{,}2b = 1{,}5a$.

1) $\frac{b}{a} = \frac{4}{5}$ 2) $\frac{b}{a} = \frac{5}{4}$ 3) $\frac{b}{a} = \frac{9}{5}$ 4) $\frac{b}{a} = \frac{5}{9}$

6. Из 13,2 м шёлка сшили 4 сарафана. Сколько таких сарафанов сошьют из 23,1 м такой ткани?

Ответ: ________________.

7. Для строительства стадиона 5 бульдозеров расчистили площадку за 2 часа 20 минут. За сколько минут 7 таких бульдозеров расчистят эту площадку?

Ответ: ________________.

8. Известно, что градусные меры углов A, B, C, D четырёхугольника $ABCD$ относятся как $1 : 2 : 3 : 4$ соответственно. Найдите градусную меру угла C.

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. Найдите отношение $\frac{7}{4}$ к $\frac{21}{39}$.

1) $\frac{147}{156}$ 2) 3,45 3) $\frac{121}{169}$ 4) 3,25

2. Масса колбасы 4 кг, а масса сосисок — 600 г. Найдите отношение массы сосисок к массе колбасы.

1) $\frac{2000}{3}$ 2) $\frac{3}{20}$ 3) $\frac{20}{3}$ 4) $\frac{3}{2000}$

3. Из каких отношений

А) $\frac{2}{3}$ и $\frac{14}{41}$ Б) 2 : 3 и 14 : 42 В) 4 : 3 и 64 : 12 Г) 5 : 4 и 25 : 20

можно составить пропорцию?

1) А 2) Б 3) В 4) Г

4. Найдите неизвестный член пропорции $\frac{0,3}{x} = \frac{21}{42}$.

Ответ: ________________.

5. Выберите отношение m к p, если $0{,}8m = 0{,}12p$.

1) $\frac{m}{p} = \frac{12}{125}$ 2) $\frac{m}{p} = \frac{125}{12}$ 3) $\frac{m}{p} = \frac{3}{20}$ 4) $\frac{m}{p} = \frac{20}{3}$

6. Из 24 метров ткани сшили 6 костюмов. Сколько метров такой же ткани потребуется на пошив 5 костюмов?

Ответ: ________________.

7. Для переноса мебели в школу 6 ребятам потребовалось 1 час 12 мин. Сколько минут потребуется 9 ребятам для переноса той же мебели в школу?

Ответ: ________________.

8. Известно, что величины углов A, B, C треугольника ABC относятся как 6 : 5 : 7 соответственно. Найдите градусную меру $\angle A$.

Ответ: ________________.

Вариант № 5

1. Найдите число, обратное отношению числа 20 к числу 7.

1) $2\frac{6}{7}$ 2) $-\frac{20}{7}$ 3) 0,35 4) $\frac{20}{7}$

2. Гитара стоит 6 тысяч рублей, а комплект струн — 300 рублей. Найдите отношение стоимости струн к стоимости гитары.

1) $\frac{300}{6}$ 2) $\frac{6}{300}$ 3) $\frac{20}{3}$ 4) $\frac{1}{20}$

3. Укажите, из каких отношений можно составить пропорцию:

$А = 0{,}875 : \frac{4}{5}$; $Б = 8{,}75 : 12{,}5$; $В = 0{,}125 : \frac{7}{80}$; $Г = 11\frac{2}{3} : 10\frac{2}{3}$.

1) А и Б 2) А и Г 3) Б и Г 4) Б и В

4. Масштаб карты 1 : 20000. Чему равно расстояние между городами (в км), если на карте оно составляет 15 см?

Ответ: ________________.

5. Две трубы наполняют бассейн за 5,3 часа. За какое время наполнят бассейн 5 таких труб (в ч)?

1) $\frac{100}{53}$ 2) 13,25 3) 2,12 4) 0,53

6. Площадь садового участка составляет 500 м^2 и распределена между местом для отдыха и площадью под фруктовыми деревьями в отношении 2 :3. Сколько м^2 занимает площадь под фруктовыми деревьями?

Ответ: ________________.

7. За 50 рублей купили 3,2 кг баклажанов. Сколько кг баклажанов можно купить за 65 рублей?

Ответ: ________________.

8. Сварили джем из малины, красной смородины и чёрной смородины массой 3 кг. Найдите массу малины в джеме (в кг), если массовые доли ингредиентов джема в указанном порядке относятся как 2 : 1 : 3.

Ответ: ________________.

Вариант № 6

1. Отрезок длиной 80 см разделили на два отрезка в отношении 5 : 3. Найдите длину большего отрезка (в см).

1) 10 2) 46 3) 8,8 4) 50

2. Укажите равенство, которое является пропорцией.

1) $8{,}4 : 2{,}1 = 2{,}8 + 1{,}2$ 2) $8{,}4 : 2{,}1 = 2 \cdot 2$
3) $8{,}4 : 2{,}1 = 12 : 3$ 4) $8{,}4 : 2{,}1 = 6 - 2$

3. Найдите неизвестный член пропорции $\frac{7}{13} = \frac{x}{39}$.

1) $\frac{91}{39}$ 2) 20 3) $\frac{507}{7}$ 4) 21

4. Тетради в количестве 126 штук разделили между двумя классами в отношении 10 : 11. Сколько тетрадей составляет бóльшая часть?

Ответ: ________________.

5. Один грамм яблок стоит x копеек. Сколько рублей стоит y килограммов яблок?

1) $10xy$ 2) $100xy$ 3) $\frac{xy}{10}$ 4) $\frac{xy}{100}$

6. За $\frac{1}{5}$ ч велосипедист проезжает 3,6 км. Какое расстояние он проедет за $\frac{4}{9}$ ч, двигаясь с той же скоростью (в км)?

Ответ: ________________.

7. Масштаб карты 1 : 200000. Чему равно расстояние между городами (в км), если на карте оно составляет 8 см?

Ответ: ________________.

8. Скорость велосипедиста во столько же раз выше скорости пешехода, во сколько раз скорость велосипедиста меньше скорости мотоциклиста. Найдите отношение скорости велосипедиста к скорости мотоциклиста, если известно, что скорость пешехода в 25 раз меньше скорости мотоциклиста.

Ответ: ________________.

§ 3. Проценты

Основные сведения

1% — это $\frac{1}{100}$ часть от целого.

Чтобы найти проценты от числа, нужно число процентов представить в виде десятичной дроби и данное число умножить на эту десятичную дробь.

Если x — количество процентов, которое составляет число a от числа b, то

$$x = \frac{a \cdot 100}{b}.$$

Если числу a соответствует $p\%$ $(p < 100)$, а числу x соответствует 100%, то

$$x = \frac{a \cdot 100}{p}.$$

Формула простого процентного роста (формула простых процентов):

$$S_n = S\left(1 + \frac{pn}{100}\right),$$

где S_n — наращённая сумма (исходная сумма вместе с начисленными процентами);

S — исходная сумма;

$p\%$ — процентная ставка от суммы, выраженная в долях за период;

n — число периодов начисления.

Формула сложного процентного роста (формула сложных процентов).

$$S_n = S\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

где S_n — наращённая сумма (исходная сумма вместе с начисленными процентами);

S — исходная сумма;

$p\%$ — процентная ставка от суммы, выраженная в долях за период;

n — число периодов начисления.

Демонстрационный вариант

1. Найдите, сколько процентов составляет число 15 от 125.

1) 25 2) 7 3) 15 4) 12

Решение. Пусть число 15 от 125 составляет x процентов. Тогда

15 — x%,

125 — 100%.

Из пропорции $15 : 125 = x : 100$ находим $x = \dfrac{15 \cdot 100}{125} = 12$. Число 15 от числа 125 составляет 12%. Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

2. Найдите 35% от числа 80.

1) $\dfrac{16}{7}$ 2) $\dfrac{7}{16}$ 3) 28 4) 3,5

Решение. 35% = 0,35.

Следовательно, 35% от числа 80 равно $80 \cdot 0{,}35 = 28$.

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

3. В доме 160 двухкомнатных и 240 трёхкомнатных квартир. Сколько процентов от всех квартир составляют трёхкомнатные?

1) 5 2) 60 3) 63,5 4) 40

Решение. Всего в доме квартир $160 + 240 = 400$. Пусть x% из них трёхкомнатные. Тогда $x = \dfrac{240 \cdot 100}{400} = 60$. Трёхкомнатные квартиры составляют 60% от всех квартир. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

4. Когда рабочий сделал 2484 детали, то оказалось, что он выполнил 46% месячной нормы. Сколько деталей составляет месячная норма рабочего?

Решение. Пусть месячная норма составляет x деталей. Тогда

2484 деталей — 46%,

x деталей — 100%.

Из пропорции $2484 : x = 46 : 100$ находим $x = \dfrac{2484 \cdot 100}{46} = 5400$; 5400 деталей — месячная норма рабочего.

Ответ: 5400.

5. Площадь поля составляет 84 га. В первый день вспахали 21 га. Сколько процентов поля не вспахали?

Решение. Согласно условию, невспаханными остались $84-21=63$ га поля. Пусть эта величина составляет $x\%$ поля. Тогда

84 га — 100%,

63 га — $x\%$.

Из пропорции $84:63=100:x$ находим $x=\dfrac{63\cdot 100}{84}=75$. Следовательно, 75% поля не вспахали.

Ответ: 75.

6. Смешали два раствора соли по 250 г каждый. Концентрация первого раствора 12%, второго — 24%. Какова концентрация полученного раствора?

Решение. Концентрация первого раствора соли массой 250 г составляет 12%. То есть соли в этом растворе $\dfrac{250\cdot 12}{100}=30$ (г).

Концентрация второго раствора соли массой 250 г составляет 24%. Это означает, что соли в этом растворе $\dfrac{250\cdot 24}{100}=60$ (г).

После того как смешали два раствора, в 500 г нового раствора стало содержаться $30+60=90$ (г) соли, что составляет $\dfrac{90\cdot 100}{500}=18(\%)$.

Ответ: 18.

7. Частным лицам принадлежит 25% акций предприятия, остальные акции принадлежат государству. Общая прибыль предприятия после выплаты налогов за год составила 7,5 млн р. Какая сумма (в рублях) из этой прибыли должна пойти на выплату государству?

Решение. Государству принадлежит $100 - - - 25 = 75\%$ акций предприятия, значит на выплату государству пойдёт сумма, равная 75% от общей прибыли предприятия. Найдём 75% от 7,5 млн р.
$0{,}75\cdot 7\,500\,000=5\,625\,000$ рублей.

Ответ: 56250000.

8. Клиент открыл в банке счёт и положил на срочный вклад 500 тыс. рублей. Определите сумму вклада через 2 года, если банк начисляет сложные проценты по ставке 30% годовых и дополнительных вложений не поступало.

Решение. 1-й способ. Сумма в 500 тыс. рублей, положенная на банковский счёт под 30% годовых, через год возрастёт до величины

$500 \cdot 1{,}3 = 650$ (тыс. рублей). Так как банк начисляет сложные проценты, то за второй год 30% будет начисляться на сумму 650 тыс. рублей и, следовательно, сумма возрастёт до $650 \cdot 1{,}3 = 845$ (тыс. рублей).

2-й способ. По формуле сложных процентов (см. «Основные сведения к параграфу») получаем $S_2 = 500\left(1+\frac{30}{100}\right)^2 = 500 \cdot \frac{169}{100} = 845$ (тыс. рублей).

Ответ: 845 (тыс. рублей).

Вариант № 1

1. Найдите, сколько процентов составляет число 3,78 от 27.

1) 3,78 2) 27 3) 14 4) 378

2. Найдите 15% от числа 34.

1) 5,1 2) 0,34 3) $2\frac{4}{15}$ 4) $\frac{15}{34}$

3. Рост самого высокого ученика в классе составляет 104% от среднего роста учеников в классе, а рост самого маленького — 92% от среднего роста учеников в классе. Определите, сколько сантиметров составляет рост самого высокого ученика, если рост самого маленького равен 115 см.

1) 125 2) 104 3) 92 4) 130

4. К новогоднему празднику каждому из 48 учеников класса были приготовлены новогодние подарки. Однако на праздник пришли только 36 учеников и забрали свои подарки. На следующий день несколько учеников забрали ещё 75% от оставшихся подарков. Сколько подарков осталось?

Ответ: ________________.

5. Диван на распродаже уценили на 70%, при этом он стал стоить 14400 р. Сколько рублей стоил диван до распродажи?

Ответ: ________________.

6. Сберегательный банк начисляет на срочный вклад $10{,}5\%$ годовых. Вкладчик положил на счёт 200000 р. Сколько рублей будет на этом счёте через год, если никаких операций со счётом проводиться не будет?

Ответ: ________________.

7. Стоимость одной тетради в магазине увеличилась на 10%, а затем в связи с уценкой уменьшилась на 10%. Сколько рублей стала стоить тетрадь после уценки, если её первоначальная стоимость составляла 26 рублей?

Ответ: ________________.

8. Стоимость обучения на подготовительных курсах увеличилась в 1,7 раза. На сколько процентов возросла стоимость обучения относительно первоначальной?

Ответ: ________________ .

Вариант № 2

1. Найдите 15% от числа 220.

1) 15 2) 33 3) 330 4) 22

2. В двух ящиках 75 кг яблок. В первом ящике 48% всех яблок. Сколько килограммов яблок во втором ящике?

1) 36 2) 45 3) 39 4) другой ответ

3. В городе N половину всех зданий составляют одноэтажные строения, 85% из которых являются жилыми домами. Известно, что $\frac{5}{6}$ всех неодноэтажных строений города N газифицировано. Чего в городе N больше — одноэтажных жилых домов или газифицированных неодноэтажных строений?

1) одноэтажных жилых домов
2) газифицированных неодноэтажных строений
3) поровну тех и других
4) для сравнения не хватает данных

4. Средний вес девочек того же возраста, что и Люба, равен 48 кг. Вес Любы составляет 120% среднего веса. Сколько килограммов весит Люба?

Ответ: ________________ .

5. В начале года число абонентов телефонной компании «Электрон» составляло 150 тыс. человек, а в конце года их стало 180 тыс. человек. На сколько процентов увеличилось за год число абонентов этой компании?

Ответ: ________________ .

6. В сплаве меди и цинка содержится 12% меди. Масса сплава 1200 г. Сколько в смеси цинка (в г)?

Ответ: ________________ .

7. Из молока можно получить творог, масса которого составляет 10% от массы молока. Сколько килограммов творога получится из 15 кг молока?

Ответ: ________________ .

8. Результаты районной контрольной работы по алгебре в 9-м классе представили в виде диаграммы (см. рис. 1). Сколько учащихся получили отметку «3», если всего работу писали 350 девятиклассников?

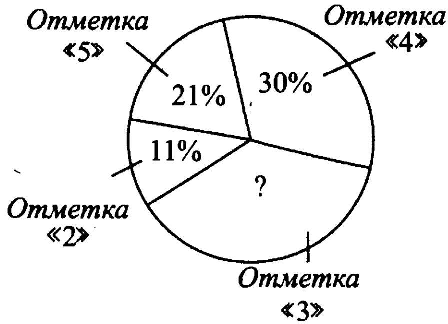


Рис. 1.

Ответ: ________________.

Вариант № 3

1. Найдите, сколько процентов от числа 20 составляет число 7.

1) 20 2) 7 3) 35 4) 287

2. Найдите 25% от числа 68.

1) $\frac{17}{25}$ 2) $\frac{25}{68}$ 3) 17,2 4) 17

3. В парке посадили клёны и липы, причём на каждые 3 липы приходилось 2 клёна. Сколько процентов от всех посаженных деревьев составляли клёны?

1) 20% 2) 30% 3) 40% 4) 60%

4. Нефтеразведочная экспедиция проводила исследования для определения вероятности наличия нефти на выделенных участках Западной Сибири. На завершающем этапе разведки проводился сейсмичёский тест на 49 участках, что составило 35% от общего числа участков. Определите число участков, на которых проводились исследования.

Ответ: ________________.

5. Яблоки стоят 63 рубля за килограмм, а черешня — 90 рублей за килограмм. На сколько процентов яблоки дешевле черешни?

Ответ: ________________.

6. Смешали три раствора сахара массой 200 г каждый. Концентрация первого раствора — 14%, концентрация второго — 16%, концентрация

третьего — 30%. Какова концентрация полученного раствора (в процентах)?

Ответ: ______________.

7. Аптека делает пенсионерам скидку на определённое количество процентов от стоимости покупки. Лекарство стоит в аптеке 650 рублей, а пенсионер заплатил за него 520 рублей. Сколько процентов составляет скидка для пенсионера?

Ответ: ______________.

8. В период распродажи магазин снижал цены дважды: в первый раз на 25%, во второй — на 40%. Сколько рублей стала стоить стиральная машина после второго снижения цен, если до начала распродажи она стоила 19 600 рублей?

Ответ: ______________.

Вариант № 4

1. Найдите 30% от числа 90.

1) 27 2) 30 3) 3 4) 300

2. В гараже были КАМАЗы и ЗИЛы, причём на три КАМАЗа приходилось семь ЗИЛов. Сколько процентов от общего числа машин в гараже составляли ЗИЛы?

1) 30 2) 70 3) 81 4) 75

3. Найдите число, 42% которого равны 28.

1) 9,52 2) $\frac{200}{3}$ 3) $\frac{100}{3}$ 4) 66

4. Супермаркет проводит акцию: «Любой кактус в горшке по цене 160 рублей. При покупке трёх кактусов скидка на третий 40%». Сколько рублей придётся заплатить за покупку трёх кактусов?

Ответ: ______________.

5. Масса сушёных яблок составляет 18% от массы свежих. Сколько килограммов сушёных яблок получится из 250 кг свежих?

Ответ: ______________.

6. Результаты контрольной работы по математике в классе представлены в виде круговой диаграммы (см. рис. 2). Сколько школьников получили оценку «2», если в классе 40 учащихся?

Ответ: ______________.

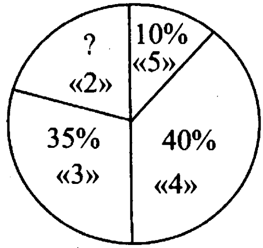


Рис. 2.

7. У Вовы 60 марок. У Вити на 20% марок меньше, чем у Вовы, а у Серёжи на 30% больше, чем у Вовы. Сколько всего марок у Вити и Серёжи?

Ответ: _______________.

8. В банк положили 700 000 рублей. В соответствии с договором банк по окончании года будет начислять 9,5% от суммы, находящейся на счёте. Какова будет сумма (в рублях) средств на счёте по истечении года, если договором не предусмотрено дополнительное вложение денег?

Ответ: _______________.

Вариант № 5

1. Сколько процентов составляет число 24 от числа 15?

1) 62,5 2) 120 3) 16 4) 160

2. Найдите число, которое на 15% больше числа 130.

1) 145 2) 149,5 3) 19,5 4) 110,5

3. В семейной коллекции дисков на каждый диск с музыкой приходится 4 диска с мультфильмами и 5 дисков с фильмами. Сколько процентов от всех дисков составляют диски с мультфильмами?

1) 30 2) 40 3) 37,5 4) 50

4. В некоторой школе среди выпускников 9-го класса 13 двоечников, что составляет 6,5% от всех выпускников. Сколько всего выпускников 9-го класса в этой школе?

Ответ: _______________.

5. В посёлке 3250 жителей, причём 18% — это люди старше 60 лет. Сколько примерно человек составляет эта категория жителей? Ответ округлите до сотен.

Ответ: _______________.

6. Корова даёт молоко 3,8%-ной жирности, а коза — 4,1%-ной жирности. Молоко какой жирности получится, если смешать молоко коровы и козы в отношении 1 : 2?

Ответ: ________________.

7. Из объявления фирмы, проводящей обучающие семинары: «Стоимость участия в семинаре — 5600 р. с человека. Группам от организаций предоставляются скидки: от 3 до 5 человек — 30%, более 5 человек — 40%». Сколько рублей должна заплатить организация, направившая на семинар группу из 6 человек?

Ответ: ________________.

8. Цена на холодильник сначала повысилась на 13%, потом понизилась на 20% от новой цены, после чего составила 11 300 рублей. Определите первоначальную цену холодильника (в рублях).

Ответ: ________________.

Вариант № 6

1. Найдите число, 20% которого равны 100.

1) 500 2) 800 3) 20 4) 80

2. Ручка стоит 17 рублей, что составляет 85% стоимости блокнота. Сколько стоит блокнот?

1) 14,25 руб. 2) 20 руб. 3) 30 руб. 4) 35 руб.

3. Сколько процентов от 4 км составляют 25 метров?

1) 0,0625 2) 62,5 3) 6,25 4) 0,625

4. Сколько страниц в книге, если в рассказе, который составляет 15% от общего числа страниц этой книги, 12 страниц?

Ответ: ________________.

5. Набор столовых приборов, который стоил 1900 рублей, продаётся с 15 %-ной скидкой. При покупке 3 таких наборов покупатель отдал кассиру 5000 рублей. Сколько рублей сдачи он должен получить?

Ответ: ________________.

6. Сплав содержит 16% олова. Сколько граммов олова содержится в 125 г сплава?

Ответ: ________________.

7. Цена товара сначала снизилась на 40%, а затем его новая цена повысилась на 40%. Сравните последнюю цену товара с его первоначальной ценой. Напишите, на сколько процентов изменилась цена.

Ответ: ________________.

8. Результаты Государственной итоговой аттестации по математике представили в виде диаграммы (см. рис. 3). Сколько учащихся получили отметку «3», если всего экзамен сдавали 450 учащихся?

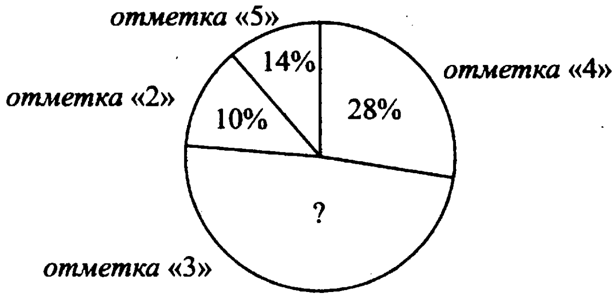


Рис. 3.

Ответ: ________________.

§ 4. Арифметические действия. Сравнение чисел

Основные сведения

Если умножить числитель и знаменатель дроби на одинаковую величину, отличную от 0, то значение дроби останется прежним.

Если числитель и знаменатель заданной дроби имеют общий делитель, то обе части можно разделить на него; такая операция называется сокращением дроби.

Сравнение дробей. Для сравнения, сложения и вычитания обыкновенных дробей их следует привести к одному и тому же знаменателю.

Чтобы сравнить две обыкновенные дроби, следует привести их к общему знаменателю и сравнить числители получившихся дробей. Дробь с бóльшим числителем будет больше.

На координатном луче точка, имеющая меньшую координату, лежит левее точки, имеющей бóльшую координату.

Из двух отрицательных чисел больше то, модуль которого меньше.

Умножение дробей. Чтобы умножить две обыкновенные дроби, нужно перемножить их числители и знаменатели: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Чтобы умножить дробь на натуральное число, надо числитель умножить на это число, а знаменатель оставить тем же.

Деление дробей. Чтобы разделить одну обыкновенную дробь на другую, надо умножить первую на дробь, обратную второй:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Чтобы получить дробь, обратную данной, следует поменять местами числитель и знаменатель.

Преобразование дробей. Чтобы преобразовать обыкновенную дробь в десятичную, следует разделить числитель на знаменатель. При этом не всегда можно получить конечную десятичную дробь.

Несократимую обыкновенную дробь можно представить в виде конечной десятичной дроби, если в разложении её знаменателя на простые множители присутствуют только множители 2 и 5.

Чтобы преобразовать конечную десятичную дробь в обыкновенную, следует представить её дробную часть в виде натурального числа, делённого на соответствующую степень числа 10. Затем к результату слева приписать целую часть, формируя смешанную дробь.

Демонстрационный вариант

1. Вычислите $11 \cdot 2\frac{13}{55} - 12{,}4$.

1) 9,6 2) 10,6 3) 12,2 4) $-2{,}2$

Решение. $11 \cdot 2\frac{13}{55} - 12{,}4 = 11 \cdot 2 + \frac{11 \cdot 13}{55} - 12{,}4 = 22 + \frac{13}{5} - 12{,}4 =$ $= 22 + 2{,}6 - 12{,}4 = 12{,}2$.

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

2. На координатной прямой отмечены числа x и y (см. рис. 4). Какое из этих утверждений верно?

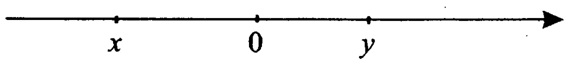


Рис. 4.

1) $x^2y > 0$ 2) $x^5y^3 > 0$ 3) $x^3y^2 > 0$ 4) $xy > 0$

Решение. Согласно рисунку $x < 0$, $y > 0$.

Рассмотрим предложенные утверждения.

Утверждение 1) верно, так как $x^2 > 0$ и, следовательно, $x^2y > 0$.

Утверждение 2) неверно, так как $x^5 < 0$, $y^3 > 0$ и, следовательно, $x^5y^3 < 0$.

Утверждение 3) неверно, так как $x^3 < 0$, $y^2 > 0$ и, следовательно, $x^3y^2 < 0$.

Утверждение 4) неверно, так как $x < 0$, $y > 0$ и, следовательно, $xy < 0$.

Из приведённых утверждений верным является только 1).

Ответ: 1.

3. Расположите числа в порядке возрастания: $-\frac{1}{3}$; $-0{,}3$; -1; $-1\frac{1}{3}$.

1) $-\frac{1}{3}$; -1; $-1\frac{1}{3}$; $-0{,}3$ 2) $-1\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$; $-0{,}3$; -1

3) -1; $-0{,}3$; $-\frac{1}{3}$; $-1\frac{1}{3}$ 4) $-1\frac{1}{3}$; -1; $-\frac{1}{3}$; $-0{,}3$

Решение. Запишем заданные числа в виде десятичных дробей. Получим последовательность чисел: $-0{,}(3)$; $-0{,}3$; -1; $-1{,}(3)$.

Учитывая, что из двух отрицательных чисел больше то, модуль которого меньше, расположим полученные числа в порядке возрастания:

$-1,(3)$; -1; $-0,(3)$; $-0,3$. Этой последовательности соответствует последовательность 4).

Ответ: 4.

4. Сравните a и b, если $a = 6 : (-2)$, $b = 12 : (-6)$.

1) $a = b$ 2) $a < b$ 3) $a > b$ 4) другой ответ

Решение. $a = 6 : (-2) = -(6 : 2) = -3$, $b = 12 : (-6) = -(12 : 6) = -2$. Так как из двух отрицательных чисел больше то, модуль которого меньше, то $-3 < -2$, значит, $a < b$. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

5. На координатной прямой изображены числа a и b. Какое из следующих неравенств неверно?

1) $a - 9 > b - 9$ 2) $a + 8 < b + 8$ 3) $\frac{a}{3} > \frac{b}{3}$ 4) $-\frac{a}{3} < -\frac{b}{3}$

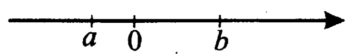


Рис. 5.

Решение. Рассмотрим предложенные утверждения.

Утверждение 1) верно, так как $a > b$ и, следовательно, $a - 9 > b - 9$.

Утверждение 2) неверно, так как $a > b$ и, следовательно, $a+8 > b+8$.

Утверждение 3) верно, так как обе части неравенства можно умножить на положительное число и, следовательно, $\frac{a}{3} > \frac{b}{3}$.

Утверждение 4) верно, так как при умножении левой и правой частей неравенства на отрицательное число знак неравенства меняется и, следовательно, $-\frac{a}{3} < -\frac{b}{3}$.

Из приведённых утверждений неверным является только 2).

Ответ: 2.

6. Соотнесите частное

А $= 145 : 5$; Б $= -4,76 : 0,01$; В $= \frac{6}{7} : \frac{8}{63}$

и результат.

1) 6,75 2) -476 3) $-0,00476$ 4) 29

Решение. Вычислим каждое из заданных частных.
А $= 145 : 5 = 29$ соответствует результату 4);

Б $= -4{,}76 : 0{,}01 = -476$ соответствует результату 2);

В $= \frac{6}{7} : \frac{8}{63} = \frac{6}{7} \cdot \frac{63}{8} = \frac{6 \cdot 63}{7 \cdot 8} = \frac{3 \cdot 9}{4} = 6{,}75$ соответствует результату 1).

Ответ:

А	Б	В
4	2	1

7. Какое из приведённых ниже неравенств является верным при любых значениях t и b, удовлетворяющих условию $t > b$?

1) $b - t > 0$ 2) $t - b > 5$ 3) $t - b > 1$ 4) $b - t < 4$

Решение. Рассмотрим предложенные утверждения.

Утверждение 1) неверно, так как $b < t$ и, следовательно, $b - t < 0$.

Утверждение 2) верно не для всех значений t и b, так как $5 > 4$, но $5 - 4 < 5$.

Утверждение 3) верно не для всех значений t и b, так как $t > b$ и, следовательно, $t - b > 0$. При $t = 5$ и $b = 4$ $t - b > 1$.

Утверждение 4) верно, так как из $b - t < 0$ следует, что $b - t < 4$.

Из приведённых утверждений верным является только 4).

Ответ: 4.

8. Сколько десятичных знаков после запятой содержит $\frac{1}{10}$ разности чисел 27,35 и 0,056?

1) 5 2) 6 3) 3 4) 4

Решение. Найдём разность заданных чисел: $27{,}35 - 0{,}056 = 27{,}294$. $\frac{1}{10}$ этой разности равна $\frac{1}{10} \cdot 27{,}294 = 2{,}7294$. Это число содержит 4 знака после запятой.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

Вариант № 1

1. Вычислите $\left(5\frac{2}{3} - 4\frac{1}{6}\right) \cdot 3\frac{1}{3}$.

Ответ: ________________.

2. На координатной прямой отмечены числа a и b (см. рис. 6). Какое из данных утверждений верно?

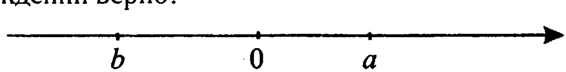


Рис. 6.

1) $ab > 0$ 2) $ba^2 > 0$ 3) $ab^2 > 0$ 4) $(ab)^3 > 0$

3. Расположите числа в порядке убывания: $-2{,}6$; $-2\frac{1}{6}$; $-1\frac{2}{5}$; $-\frac{5}{6}$.

1) $-2{,}6$; $-2\frac{1}{6}$; $-1\frac{2}{5}$; $-\frac{5}{6}$ 2) $-2\frac{1}{6}$; $-2{,}6$; $-1\frac{2}{3}$; $-\frac{5}{6}$

3) $-\frac{5}{6}$; $-1\frac{2}{5}$; $-2\frac{1}{6}$; $-2{,}6$ 4) $-1\frac{2}{5}$; $-\frac{5}{6}$; $-2{,}6$; $-2\frac{1}{6}$

4. Сравните числа a и b, если $a = 7 : (-3)$, $b = 3 : (-7)$.

1) $a = b$ 2) $a < b$ 3) $a > b$ 4) другой ответ

5. О числах m и k известно, что $m > k$. Среди приведённых ниже неравенств выберите верные:

1) $m - k > -6$
2) $k - m > 5$
3) $k - m < 5$

1) 1и2 2) 2и3 3) 1и3 4) 1, 2и3

6. Соотнесите произведение и результат:

$А = 12{,}3 \cdot 2{,}1$; $Б = \frac{25}{3} \cdot 1\frac{3}{15}$; $В = 13{,}2 \cdot 1\frac{3}{4}$.

1) 23,1 2) 25,83 3) 14,4 4) 10

Ответ:

А	Б	В

7. Какое из следующих неравенств не следует из неравенства $a - x > t$?

1) $a > x + t$ 2) $t + x - a < 0$ 3) $a - t > x$ 4) $a - x - t < 0$

8. Сколько десятичных знаков после запятой содержит произведение числа 0,001 на разность чисел 3272,354 и 1262,304?

Ответ: ________________.

Вариант № 2

1. Значение выражения $-7 - 10 : (-2{,}5) - 5 \cdot \frac{1}{6}$ равно

1) $-3\frac{5}{6}$ 2) $-11\frac{5}{6}$ 3) $-10\frac{1}{6}$ 4) $-2\frac{1}{6}$

2. На координатной прямой (см. рис. 7) отмечены числа a и b. Какое из приведённых утверждений **неверно**?

Рис. 7.

1) $a^2b > 0$ 2) $a + b > 0$ 3) $a - b > 0$ 4) $b - a > 0$

3. Найдите разность между значениями выражений $\frac{0{,}2}{0{,}05}$ и $\frac{6}{18} \cdot 0{,}3$.

Ответ: ________________.

4. Укажите наибольшее из чисел: 0,34; $\frac{7}{3}$; $\frac{7}{4}$; 1,1.

1) 0,34 2) $\frac{7}{4}$ 3) $\frac{7}{3}$ 4) 1,1

5. О числах m и k известно, что $m < k$. Среди приведённых ниже неравенств выберите верные:

1) $m - k < 2$
2) $k - m > -5$
3) $k - m < -5$

1) 1и2 2) 2и3 3) 1и3 4) 1, 2и3

6. Какое из следующих неравенств не следует из неравенства $a + x < t$?

1) $a < t - x$ 2) $t - a > x$ 3) $a - t + x > 0$ 4) $t - a - x > 0$

7. Найдите значение выражения $\frac{1{,}4^2 + 0{,}2^2}{1{,}3 - 0{,}8}$.

Ответ: ________________.

8. Найдите количество песчинок, содержащихся в 1 тонне песка, считая, что масса каждой песчинки составляет 0,002 г.

1) $2 \cdot 10^9$ 2) $2 \cdot 10^8$ 3) $5 \cdot 10^9$ 4) $5 \cdot 10^8$

Вариант № 3

1. Вычислите $\left(2{,}5 - 3\frac{1}{2}\right) : 0{,}5$.

Ответ: ________________.

2. На координатной прямой (см. рис. 8) отмечены числа x и y. Какое из приведённых утверждений верно?

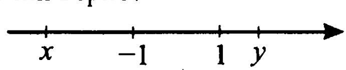


Рис. 8.

1) $xy^2 > 0$ 2) $y - x < 0$ 3) $xy > 0$ 4) $x^2 - y > 0$

3. Расположите числа в порядке возрастания: 0,3; $\frac{1}{2}$; −5; −4,8.

1) $0{,}3;\ \frac{1}{2};\ -5;\ -4{,}8$ 2) $-5;\ -4{,}8;\ 0{,}3;\ \frac{1}{2}$

3) $-4{,}8;\ -5;\ \frac{1}{2};\ 0{,}3$ 4) $\frac{1}{2};\ 0{,}3;\ -4{,}8;\ -5$

4. Сравните a и b, если $a = 2 : (-3)$, $b = 2 \cdot (-3)$.

1) $a = b$ 2) $a < b$ 3) $a > b$ 4) другой ответ

5. О числах m, k, p и d известно, что $m < k$, $d = p$, $d > k$. Сравните числа m и d.

1) $d > m$ 2) $d < m$ 3) $d = m$ 4) Сравнить невозможно

6. Соотнесите частное

А $= 123 : 6$; Б $= \frac{5}{7} : \frac{2}{49}$; В $= -3{,}25 : 0{,}001$

и результат.

1) 17,5 2) -3250 3) -325 4) $20\frac{1}{2}$

Ответ:

А	Б	В

7. Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{24}$. Какая это точка?

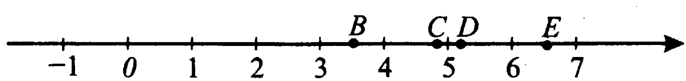


Рис. 9.

1) B 2) C 3) D 4) E

8. Сколько десятичных знаков после запятой содержит $\frac{1}{100}$ суммы чисел 53,95 и 0,055?

Ответ: ________________ .

Вариант № 4

1. Вычислите $\left(3{,}6 - 3\frac{1}{3}\right) \cdot 0{,}3$.

Ответ: ________________ .

2. На координатной прямой (см. рис. 10) отмечены числа a и b. Какое из приведённых утверждений **неверно**?

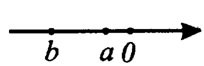


Рис. 10.

1) $a+b<0$ 2) $a-b>0$ 3) $ab>0$ 4) $b-a>0$

3. Расположите числа в порядке убывания: 1,3; $\frac{1}{2}$; −2,3; $1\frac{1}{3}$.

1) $\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{3}$; 1,3; −2,3 2) $1\frac{1}{3}$; 1,3; $\frac{1}{2}$; −2,3

3) − 2,3; $1\frac{1}{3}$; 1,3; $\frac{1}{2}$ 4) − 2,3; 1,3; $1\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$

4. Сравните x и y, если $x = 3\cdot(-4)$, $y = 3 : (-4)$.

1) $x > y$ 2) $x = y$

3) $x < y$ 4) другой ответ

5. О числах a, b, c и d известно, что $a < b, d = c, d > b$. Сравните числа d и a.

1) $d > a$ 2) $d < a$ 3) $d = b$ 4) Сравнить невозможно

6. Соотнесите произведение чисел

$А = 3\cdot 12$; $Б = \frac{7}{3}\cdot\frac{3}{14}$; $В = -4{,}25\cdot 17$

и результат.

1) 0,5 2) −68,25 3) 36 4) −72,25

Ответ:

А	Б	В

7. Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{34}$. Какая это точка?

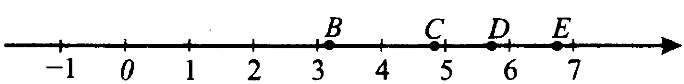


Рис. 11.

1) B 2) C 3) D 4) E

8. Сколько десятичных знаков после запятой содержит $\frac{1}{10}$ разности чисел 21,66 и 13,86?

Ответ: ________________.

Вариант № 5

1. Вычислите $\left(3\frac{1}{5} - 1{,}1\right) : \frac{1}{5}$.

Ответ: ________________.

2. На координатной прямой (см. рис. 12) отмечены числа m и n. Какое из приведённых утверждений **неверно**?

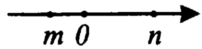


Рис. 12.

1) $mn > 0$ 2) $m^2n > 0$ 3) $m - n < 0$ 4) $n + m > 0$

3. Расположите числа в порядке убывания: $-\frac{5}{7}$; 0,55; $\frac{4}{5}$; $-0{,}75$.

1) $\frac{4}{5}$; 0,55; $-\frac{5}{7}$; $-0{,}75$ 2) $\frac{4}{5}$; 0,55; $-0{,}75$; $-\frac{5}{7}$

3) 0,55; $\frac{4}{5}$; $-\frac{5}{7}$; $-0{,}75$ 4) $-0{,}75$; $-\frac{5}{7}$; 0,55; $\frac{4}{5}$

4. Сравните значения выражений $a + 2b$ и $b - a$ при $a = -1$, $b = 2{,}5$.

1) $a + 2b < b - a$ 2) $a + 2b > b - a$

3) $a + 2b = b - a$ 4) другой ответ

5. О числах a и m известно, что $a < m$. Какое из следующих неравенств неверно?

1) $a + 2 < m + 2$ 2) $a - 3 < m - 3$

3) $\frac{a}{3} < \frac{m}{3}$ 4) $-\frac{a}{6} < -\frac{m}{6}$

6. Соотнесите произведение чисел

А $= 0{,}02 \cdot 15$; Б $= \frac{3}{7} \cdot 2{,}8$; В $= 3{,}14 \cdot \frac{1}{5}$

и результат.

1) 0,3 2) 0,628 3) 3 4) 1,2

Ответ:

А	Б	В

7. Какое из чисел отмечено на координатной прямой точкой А?

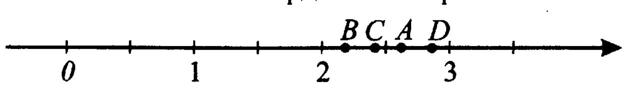


Рис. 13.

1) $\sqrt{5}$ 2) $\sqrt{6}$ 3) $\sqrt{7}$ 4) $\sqrt{8}$

8. Сколько десятичных знаков после запятой содержит произведение чисел 6,482 и $-2{,}555$?

Ответ: ________________.

Вариант № 6

1. Вычислите $\left(5{,}5 - 2\frac{5}{6}\right) : 4 - 1$.

1) $\frac{1}{3}$ 2) $-\frac{1}{3}$ 3) $\frac{8}{9}$ 4) $9\frac{2}{3}$

2. На координатной прямой (см. рис. 14) отмечены числа a и b. Какое из приведённых утверждений **неверно**?

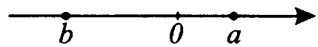


Рис. 14.

1) $a > b$ 2) $a + b > 0$ 3) $ab < 0$ 4) $a - b > 0$

3. Найдите разность между значениями выражений $\frac{0{,}3}{0{,}18}$ и $\frac{19}{20} : 0{,}2$.

1) -2 2) $1\frac{7}{30}$ 3) $-0{,}5$ 4) $-3\frac{1}{12}$

4. Укажите наименьшее из чисел: $\frac{7}{8}$; $\frac{7}{9}$; 0,75; 0,81.

Ответ: ________________.

5. Укажите наибольшее из чисел: $a = -\frac{3}{8}$; $b = -0{,}4$; $c = -\frac{1}{4}$; $d = -0{,}9$.

1) d 2) c 3) b 4) a

6. О числах r и m известно, что $r < m$. Какое из следующих неравенств неверно?

1) $r - 5 < m - 5$ 2) $r + 7 < m + 7$

3) $-\frac{r}{2} < -\frac{m}{2}$ 4) $\frac{r}{6} < \frac{m}{6}$

7. Найдите значение выражения $\frac{1{,}2^2 - 0{,}8^2}{1{,}4 - 1}$.

Ответ: ________________.

8. Скорость Ахиллеса составляет 10 м/с, скорость черепахи — 0,1 км/ч. Во сколько раз скорость Ахиллеса больше, чем скорость черепахи?

1) 10 2) 100 3) 36 4) 360

§ 5. Числовые подстановки в буквенные выражения. Формулы

Основные сведения

Алгебраическим (буквенным) выражением называется одна или несколько алгебраических величин (чисел и букв), соединённых между собой знаками алгебраических действий: сложения, вычитания, умножения и деления, извлечения корня и возведения в целую степень; а также скобки, определяющие порядок выполнения действий.

Если вместо всех букв, входящих в алгебраическое выражение, подставить некоторые числа и выполнить действия, то полученное в результате число называется **значением алгебраического выражения**.

Демонстрационный вариант

1. Найдите значение выражения $1{,}2 - \frac{5}{6} \cdot a$ при $a = 0{,}12$.

1) 1,1 2) 2 3) −8,8 4) 0

Решение. Подставим в заданное выражение значение $a = 0{,}12$. Получим $1{,}2 - \frac{5}{6} \cdot 0{,}12 = 1{,}2 - 5 \cdot 0{,}02 = 1{,}2 - 0{,}1 = 1{,}1$.

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

2. Из формулы второго закона Ньютона $a = \frac{F}{m}$ выразите силу F.

1) $F = \frac{a}{m}$ 2) $F = \frac{m}{a}$ 3) $F = ma$ 4) $F = \frac{Fm}{a}$

Решение. Умножив обе части заданного равенства на m, получим $m \cdot a = \frac{F \cdot m}{m}$. Отсюда $F = ma$.

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

3. Путь $S(t)$ в метрах, который автомобиль проезжает за t секунд, вычисляется по формуле $S(t) = 2t^2 + 5$. За сколько секунд автомобиль проедет 55 м?

1) 25 2) 5 3) 15 4) 10

Решение. Согласно условию задачи, необходимо найти время t_0, за которое автомобиль пройдёт путь $S(t_0) = 55$.

Следовательно, $2(t_0)^2 + 5 = 55$. Отсюда, учитывая, что $t_0 > 0$, находим $t_0 = 5$. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

4. Соотнесите площадь заштрихованной фигуры с соответствующей формулой (см. рис. 15).

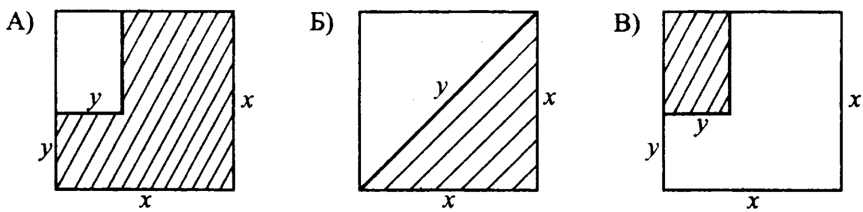


Рис. 15.

1) $\frac{1}{2}x^2$ 2) $x^2 - xy + y^2$ 3) $x^2 + y$ 4) $xy - y^2$

Решение. Найдём площадь каждой из предложенных фигур.

Площадь заштрихованной фигуры, изображённой на рисунке 15 А, можно найти как разность площади квадрата со стороной x и прямоугольника со сторонами y и $x-y$. Эта площадь $x^2-y(x-y) = x^2-xy+y^2$ соответствует формуле 2).

Площадь заштрихованной фигуры, изображённой на рисунке 15 Б, равна половине площади квадрата со стороной x. Эта площадь $\frac{1}{2} \cdot x^2$ соответствует формуле 1).

Площадь заштрихованной фигуры, изображённой на рисунке 15 В, равна площади прямоугольника со сторонами y и $x - y$. Эта площадь $y(x - y) = xy - y^2$ соответствует формуле 4).

Ответ:

А	Б	В
2	1	4

5. Площадь правильного треугольника вычисляется по формуле $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где S — площадь треугольника, a — сторона треугольника. Во сколько раз площадь правильного треугольника будет больше при $a = 6$, чем при $a = 3$?

1) 9 2) 2 3) 3 4) 4

Решение. Обозначим S_1 — площадь треугольника со стороной $a_1 = 6$, S_2 — площадь треугольника со стороной $a_2 = 3$. Тогда, согласно условию задачи, необходимо найти отношение $S_1 : S_2$.

$$S_1 : S_2 = \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} : \frac{a_2^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{a_2^2\sqrt{3}} = \frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{6^2}{3^2} = 4.$$

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

6. Из равенства $a + \frac{1}{3}b = 2(b - a)$ выразите b.

1) $b = 3a$ 2) $b = 2a - \frac{1}{3}$ 3) $b = 1{,}8a$ 4) $b = 9a$

Решение. $a + \frac{1}{3}b = 2(b - a) \Leftrightarrow 3a + b = 6(b - a) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3a + b = 6b - 6a \Leftrightarrow 5b = 9a \Leftrightarrow b = 1{,}8a.$

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

7. Расстояние s (в метрах) до места удара молнии можно приближённо вычислить по формуле $s = 330t$, где t — количество секунд, прошедших между вспышкой молнии и ударом грома. Определите, на каком расстоянии от места удара молнии находится наблюдатель, если $t = 17$. Ответ дайте в километрах, округлив его до целых.

Решение. Вычислим по формуле $s = 330t = 330 \cdot 17 = 5610$ м $= 5{,}610$ км. Округлим до целых $5{,}610 \approx 6$.

Ответ: 6.

8. Перевести значение температуры по шкале Цельсия в шкалу Фаренгейта позволяет формула $F = 1{,}8C + 32$, где C — градусы Цельсия, F — градусы Фаренгейта. Какая температура по шкале Цельсия соответствует $100°$ по шкале Фаренгейта? Ответ округлите до десятых.

Решение. Согласно условию задачи, необходимо найти температуру по шкале Цельсия, которая соответствует $100°$ по шкале Фаренгейта. Получим уравнение $100 = 1{,}8C + 32$, отсюда

$C = (100 - 32) : 1{,}8 = 37{,}7(7) \approx 37{,}8.$

Ответ: $37{,}8$.

Вариант № 1

1. Найдите значение выражения $\frac{3}{4} - \frac{5}{8} \cdot a + 2{,}3$ при $a = 1{,}2$.

Ответ: ________________.

2. Из формулы нахождения площади треугольника $S = \frac{ah}{2}$, где a — длина стороны треугольника, h — высота треугольника, проведённая к этой стороне, выразите высоту h.

1) $h = \frac{2S}{a}$ 2) $h = \frac{Sa}{2}$ 3) $h = \frac{2a}{S}$ 4) $h = 2Sa$

3. Формула для вычисления прибыли от продажи товара имеет вид $P = O - C$, где C — закупочная стоимость товара, O — отпускная стоимость товара. По какой цене нужно отпустить (продать) товар, приобретённый по цене 12360 руб., чтобы получить прибыль 3240 руб.?

Ответ: ________________.

4. Соотнесите площадь S фигуры, изображённой на рисунке 16, с формулой.

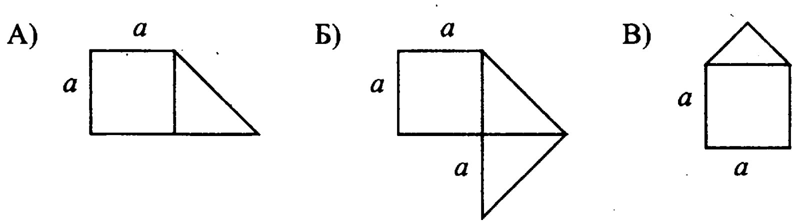


Рис. 16.

1) $S = \frac{5a^2}{4}$ 2) $S = \frac{2a^2}{5}$ 3) $S = \frac{3a^2}{2}$ 4) $S = 2a^2$

Ответ:

А	Б	В

5. Площадь правильного шестиугольника вычисляется по формуле $S = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$, где a — длина стороны шестиугольника. Во сколько раз длина стороны первого шестиугольника больше длины стороны второго шестиугольника, если $S_1 = 40{,}96$; $S_2 = 10{,}24$?

Ответ: ________________.

6. Из равенства $3a - 5b = \frac{a}{b+1}$ выразите a.

1) $a = 5b(b+1)$ 2) $a = \dfrac{5b(b+1)}{4}$

3) $a = \dfrac{5b(b+1)}{3b+2}$ 4) $a = \dfrac{b(5b+3)}{3b-1}$

7. Зная длину своего шага, человек может приближённо подсчитать пройденное им расстояние s по формуле $s = nl$, где n — число шагов, l — длина шага. Какое расстояние прошёл человек, если $l = 64$ см, $n = 1500$? Ответ выразите в километрах.

Ответ: ________________.

8. Чтобы перевести значение температуры по шкале Цельсия ($t°C$) в шкалу Фаренгейта ($t°F$) пользуются формулой $F = 1{,}8C + 32$, где С — градусы Цельсия, F — градусы Фаренгейта. Какая температура по шкале Фаренгейта соответствует 102° по шкале Цельсия?

Ответ: ________________.

Вариант № 2

1. Найдите значение выражения $5 - \dfrac{7}{4} \cdot c$ при $c = -8$.

Ответ: ________________.

2. Из формулы объёма конуса $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ выразите высоту h.

1) $h = \dfrac{3V}{\pi r^2}$ 2) $h = \dfrac{V}{3r^2}$ 3) $h = \dfrac{\pi r^2}{3V}$ 4) $h = \dfrac{3\pi r^2}{V}$

3. Скорость первого велосипедиста равна $v\,\dfrac{\text{км}}{\text{ч}}$, а второго — на $2\,\dfrac{\text{км}}{\text{ч}}$ больше. Какое расстояние проедет второй велосипедист за t часов? Составьте формулу.

1) $s = \dfrac{v+2}{t}$ 2) $s = (v+2)t$ 3) $s = vt$ 4) $s = 2vt$

4. Найдите значение выражения $\sqrt{5x-2}$ при $x = 1{,}2$.

1) 2 2) $\sqrt{2}$

3) $2\sqrt{2}$ 4) при $x = 1{,}2$ выражение не имеет смысла

5. В фирме «С ветерком!» стоимость поездки на такси (в рублях) рассчитывается по формуле $C = 110 + 13 \cdot (t-6)$, где t — длительность поездки, выраженная в минутах ($t > 6$). Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость 26-минутной поездки.

Ответ: ________________.

6. Период колебания математического маятника (в секундах) приближённо можно вычислить по формуле $T = 2\sqrt{l}$, где l — длина нити в метрах. Пользуясь этой формулой, найдите длину нити маятника (в метрах), период колебаний которого составляет 23 секунды.

Ответ: ________________.

7. Центростремительное ускорение при движении по окружности (в м/с^2) можно вычислить по формуле $a = \omega^2 R$, где ω — угловая скорость (в с$^{-1}$), а R — радиус окружности (в м). Пользуясь этой формулой, найдите расстояние R (в метрах), если угловая скорость равна 7,2 с$^{-1}$, а центростремительное ускорение равно 1036,8 м/с^2.

Ответ: ________________.

8. Закон всемирного тяготения можно записать в виде $F = \gamma\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$, где F — сила притяжения между телами (в ньютонах), m_1 и m_2 — массы тел (в килограммах), r — расстояние между центрами масс тел (в метрах), а γ — гравитационная постоянная, равная $6{,}67\cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2. Пользуясь этой формулой, найдите массу тела m_1 (в килограммах), если $F = 83{,}375$ Н, $m_2 = 5\cdot 10^{11}$ кг, а $r = 40$ м.

Ответ: ________________.

Вариант № 3

1. Найдите значение выражения $3 - \dfrac{7}{8}\cdot 4 + a$ при $a = 0{,}5$.

Ответ: ________________.

2. Из формулы цены товара $a = \dfrac{C}{n}$, где C — стоимость товара, n — количество товара, выразите стоимость C.

1) $C = \dfrac{a}{n}$ 2) $C = \dfrac{n}{a}$ 3) $C = a\cdot n$ 4) $C = a^2 n$

3. При движении тела по прямой его скорость $v(t)$ в $\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$ изменяется по закону $v(t) = 7t + 11$ (t — время движения тела в секундах). Какова будет скорость тела через 2 секунды после начала движения $\left(\text{в } \dfrac{\text{м}}{\text{с}}\right)$?

4. Соотнесите длину отрезка MN с соответствующей формулой (см. рис. 17).

1) $MN = z - x + y$ 2) $MN = x + y + z$
3) $MN = z - x$ 4) $MN = z - (x + y)$

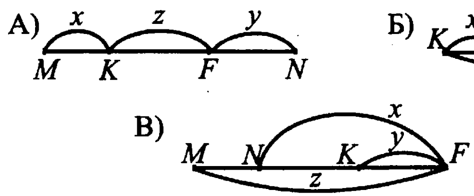


Рис. 17.

Ответ:

А	Б	В

5. Площадь правильного шестиугольника S в см^2 вычисляется по формуле $S = \frac{3}{2} \cdot a^2\sqrt{3}$ (a — длина стороны шестиугольника в см). Во сколько раз площадь первого шестиугольника меньше площади второго, если $a_1 = 2$ см, $a_2 = 4$ см?

Ответ: ________________.

6. Из равенства $2a + 3{,}8b = \frac{a+b}{5}$ выразите a.

1) $a = 2b$ 2) $a = -\frac{2{,}8b}{9}$ 3) $a = -2b$ 4) $a = \frac{4{,}8b}{11}$

7. В фирме «Родник» стоимость (в рублях) колодца из железобетонных колец рассчитывается по формуле $C = 8000 + 3400 \cdot n$, где n — число колец, установленных при рытье колодца. Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость колодца из 4 колец.

Ответ: ________________.

8. Закон Кулона можно записать в виде $F = k \cdot \frac{q_1q_2}{r^2}$, где F — сила взаимодействия зарядов (в ньютонах), q_1 и q_2 — величины зарядов (в кулонах),k — коэффициент пропорциональности (в Н·м^2/Кл^2), а r — расстояние между зарядами (в метрах). Пользуясь формулой, найдите величину заряда q_1 (в кулонах), если $k = 9 \cdot 10^9$ Н·м^2/Кл^2, $q_2 = 0{,}006$ Кл, $r = 300$ м, а $F = 0{,}48$ Н.

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}+1}$ при $m = 1{,}21$; $n = 0{,}01$.

Ответ: ________________.

2. Из формулы длины окружности $C = 2\pi R$ выразите число π.

Ответ: ________________.

3. При движении тела пройденный им путь $S(t)$ в метрах изменяется по закону $S(t) = t^3 + 3t$, где t — время движения тела в секундах. Какой путь пройдёт тело за 3 секунды?

1) 12 2) 16 3) 24 4) 36

4. Упростите выражение $(a-b)(a+b) - (a+b)(2a+b) + a^2 + 2b^2$ и найдите его значение при $a = 3{,}5$, $b = -0{,}2$.

Ответ: ________________.

5. Из равенства $3a - 2{,}4b = \dfrac{a + 72{,}9b}{4}$ выразите a.

1) $-2b$ 2) $7{,}5b$ 3) $2b$ 4) $5b$

6. Площадь четырёхугольника можно вычислить по формуле $S = \dfrac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2}$, где d_1 и d_2 — длины диагоналей четырёхугольника, α — угол между диагоналями. Пользуясь этой формулой, найдите площадь четырёхугольника, если длины диагоналей $d_1 = 11, d_2 = 6, \sin\alpha = \dfrac{2}{33}$.

Ответ: ________________.

7. Закон Джоуля-Ленца можно записать в виде $Q = I^2Rt$, где Q — количество теплоты (в джоулях), I — сила тока (в амперах), R — сопротивление цепи (в омах), а t — время (в секундах). Пользуясь этой формулой, найдите время t (в секундах), если $Q = 3528$ Дж, $I = 7$ А, $R = 6$ Ом.

Ответ: ________________.

8. Закон Менделеева-Клапейрона можно записать в виде $PV = \nu RT$, где P — давление (в паскалях), V — объём (в м^3), ν — количество вещества (в молях), T — температура (в градусах Кельвина), а R — универсальная газовая постоянная, равная 8,31 Дж/(К$\cdot$ моль). Пользуясь этой формулой, найдите температуру T (в градусах Кельвина), если $\nu = 53$ моля, $P = 365{,}7$ Па, $V = 277$ м^3.

Ответ: ________________.

Вариант № 5

1. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{p}+2}{\sqrt{q}}$ при $p = 0{,}49$; $q = 0{,}09$.

Ответ: ________________.

2. Модуль нормальной составляющей ускорения при движении по криволинейной траектории вычисляется по формуле $a_{\text{н}} = \dfrac{v^2}{R}$, где v — скорость движения, R — радиус кривизны траектории. Выразите из данной формулы скорость v.

Ответ: ________________.

3. Время t, затраченное катером на преодоление расстояния 100 км по течению реки и обратно, вычисляется по формуле $t = \dfrac{100}{v+2} + \dfrac{100}{v-2}$ (v км/ч — собственная скорость катера). Какое время займёт такое путешествие у катера с собственной скоростью 6 км/ч?

1) 50 ч 2) 37,5 ч 3) 75 ч 4) 12,5 ч

4. В фирме «Вода» стоимость (в рублях) колодца из железобетонных колец рассчитывается по формуле $C = 7500 + 1200 \cdot n$, где n — число колец, установленных при рытье колодца. Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость колодца из 6 колец.

Ответ: ________________.

5. Площадь поверхности сферы в м^2 вычисляется по формуле $S = 4\pi r^2$ (r — радиус сферы в м). Во сколько раз площадь поверхности сферы радиусом 6 м больше площади поверхности сферы радиусом 4 м?

1) 2,25 2) 1,5 3) 6π 4) 10

6. Из равенства $1{,}5k + 7n = \dfrac{4}{mn^2}$ выразите m.

1) $m = \dfrac{n^2}{4(1{,}5k + 7n)}$ 2) $m = \dfrac{1{,}5k + 7n}{4n^2}$

3) $m = \dfrac{4n^2}{1{,}5k + 7n}$ 4) $m = \dfrac{4}{n^2(1{,}5k + 7n)}$

7. Мощность постоянного тока (в ваттах) вычисляется по формуле $P = I^2R$, где I — сила тока (в амперах), R — сопротивление (в омах). Пользуясь этой формулой, найдите сопротивление R (в омах), если мощность составляет 630 Вт, а сила тока равна 1,5 А.

Ответ: ________________.

8. Центростремительное ускорение при движении по окружности (в м/с^2) можно вычислить по формуле $a = \omega^2 R$, где ω — угловая скорость (в с$^{-1}$), а R — радиус окружности (в м). Пользуясь этой формулой, найдите расстояние R (в метрах), если угловая скорость равна 3,8 с$^{-1}$, а центростремительное ускорение равно 361 м/с^2.

Ответ: ________________.

Вариант № 6

1. Найдите значение выражения $\frac{7}{x} + 6$ при $x = -\frac{5}{3}$.

Ответ: ________________.

2. Из формулы силы $F = am$ выразите массу m.

Ответ: ________________.

3. Одна сторона треугольника равна a см, вторая — 3 см, а третья — в два раза больше первой. Найдите периметр треугольника.

1) $P = 2(a+3)$ 2) $P = 2a+3$
3) $P = 3(a+3)$ 4) $P = 3(a+1)$

4. Найдите значение функции $f(x) = \frac{4x-1}{x-2} + 3$, если значение аргумента равно 3.

1) 20 2) 14 3) 2,5 4) 24

5. Упростите выражение $(a-b)(a+b) - (a+b)^2 + 2b^2$ и найдите его значение при $a = 3,2$, $b = -0,3$.

Ответ: ________________.

6. При движении тела пройденный им путь $S(t)$ в метрах изменяется по закону $S(t) = t^3 - 5t$, где t — время движения тела в секундах. Какой путь пройдёт тело за 4 секунды? Ответ дайте в метрах.

Ответ: ________________.

7. Закон Джоуля-Ленца можно записать в виде $Q = I^2Rt$, где Q — количество теплоты (в джоулях), I — сила тока (в амперах), R — сопротивление цепи (в омах), а t — время (в секундах). Пользуясь этой формулой, найдите количество теплоты (в джоулях), если $t = 12$ с, $I = 7$ А, $R = 6$ Ом.

Ответ: ________________.

8. Закон Кулона можно записать в виде $F = k \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$, где F — сила взаимодействия зарядов (в ньютонах), q_1 и q_2 — величины зарядов (в кулонах), k — коэффициент пропорциональности (в Н·м²/Кл²), а r — расстояние между зарядами (в метрах). Пользуясь формулой, найдите величину заряда q_1 (в кулонах), если $k = 9 \cdot 10^9$ Н·м²/Кл², $q_2 = 0{,}005$ Кл, $r = 2000$ м, а $F = 0{,}81$ Н.

Ответ: ________________.

§ 6. Степень с целым показателем

Основные сведения

Свойства степени с целым показателем.

$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$.

$a^n : a^k = a^{n-k}$, если $n > k$.

$\left(a^n\right)^k = a^{nk}$.

$a^n \cdot b^n = (ab)^n$.

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, $b \neq 0$.

По определению полагают, что $a^0 = 1$ для любого $a \neq 0$.

Если $a \neq 0$, то $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, где n — натуральное число.

Справедливо равенство $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

Демонстрационный вариант

1. Вычислите $(a^2)^{-3} \cdot a^9$.

1) a^4 2) a^3 3) a^{15} 4) a^8

Решение. $(a^2)^{-3} \cdot a^9 = a^{2\cdot(-3)} \cdot a^9 = a^{-6} \cdot a^9 = a^{-6+9} = a^3$.

Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

2. Представьте выражение $\frac{(t^4)^{-2}}{t^{-3}}$ в виде степени с основанием t ($t \neq 0$).

1) t^{-11} 2) t^{-19} 3) t^{-5} 4) t^{-13}

Решение. $\frac{(t^4)^{-2}}{t^{-3}} = \frac{t^{4\cdot(-2)}}{t^{-3}} = \frac{t^{-8}}{t^{-3}} = t^{-8-(-3)} = t^{-5}$.

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

3. Найдите значение выражения $\frac{4}{x^3} \cdot \frac{5}{x^{-5}}$ при $x = -\frac{1}{2}$.

1) -5 2) 5 3) $\frac{5}{8}$ 4) 80

Решение. $\dfrac{4}{x^3} \cdot \dfrac{5}{x^{-5}} = \dfrac{4 \cdot 5}{x^3 \cdot x^{-5}} = \dfrac{20}{x^{3-5}} = \dfrac{20}{x^{-2}} = 20x^2.$

Подставляя в полученное выражение значение $x = -\dfrac{1}{2}$, получим

$20 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 20 \cdot \frac{1}{4} = 5.$

Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

4. Упростите выражение $\dfrac{m^{-2} \cdot n^5}{m^{-4} \cdot (n^{-1})^5}$.

1) $m^{-6}n^{10}$ 2) m^2n 3) m^2 4) m^2n^{10}

Решение. $\dfrac{m^{-2} \cdot n^5}{m^{-4} \cdot (n^{-1})^5} = \dfrac{m^{-2} \cdot n^5}{m^{-4} \cdot n^{-5}} = m^{-2-(-4)}n^{5-(-5)} = m^2n^{10}.$

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

5. Во сколько раз $3{,}84 \cdot 10^3$ меньше, чем $1{,}496 \cdot 10^4$? Результат округлите до десятых.

1) 0,3 2) 2,6 3) 13,9 4) 3,9

Решение. Для того чтобы определить, во сколько раз $3{,}84 \cdot 10^3$ меньше, чем $1{,}496 \cdot 10^4$, найдём частное $\dfrac{1{,}496 \cdot 10^4}{3{,}84 \cdot 10^3} = \dfrac{1{,}496 \cdot 10}{3{,}84} \approx 3{,}9.$

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

6. Укажите промежуток, которому принадлежит значение выражения $(27^2 \cdot 3^{-8})^{-1}$.

1) $(-5; -1)$ 2) $(5; 12)$ 3) $\left(\frac{1}{3}; 4\right)$ 4) $(10; 12)$

Решение. $(27^2 \cdot 3^{-8})^{-1} = \left((3^3)^2 \cdot 3^{-8}\right)^{-1} = (3^{3\cdot 2} \cdot 3^{-8})^{-1} =$
$= (3^6 \cdot 3^{-8})^{-1} = (3^{6-8})^{-1} = (3^{-2})^{-1} = 3^{-2\cdot(-1)} = 3^2 = 9.$

Следовательно, значение заданного выражения принадлежит промежутку 2) $(5; 12)$.

Ответ: 2.

7. Среди чисел $\left(\frac{1}{3}\right)^3$, $\left(\frac{1}{3}\right)^4$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$ найдите наибольшее.

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$ 3) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$ 4) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$

Решение. $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} = \left(-\frac{3}{1}\right)^{4} = (-1)^4 \cdot 3^4 = 3^4.$

$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{1}\right)^{3} = (-1)^3 \cdot 3^3 = -3^3.$

Так как $\left(\frac{1}{3}\right)^{3} < 1$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^{4} < 1$, то наибольшим из предложенных чисел является ответ 4) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$.

Ответ: 4.

8. Соотнесите каждое выражение

А) $(a^2)^{-3} \cdot a^5 \cdot a^0$; Б) $(a^2 \cdot a^{-3})^5$; В) $\frac{(a^{-2})^3}{a^5}$

с тождественно равным ему выражением (при $a \neq 0$).

1) a 2) a^{-1} 3) a^{-11} 4) a^{-5}

Решение. Упростим каждое из предложенных выражений.

$(a^2)^{-3} \cdot a^5 \cdot a^0 = a^{2\cdot(-3)} \cdot a^5 \cdot a^0 = a^{-6} \cdot a^5 \cdot 1 = a^{-6+5} = a^{-1}$. Соответствует выражению 2).

$(a^2 \cdot a^{-3})^5 = (a^{2-3})^5 = (a^{-1})^5 = a^{-5}$. Соответствует выражению 4).

$\frac{(a^{-2})^3}{a^5} = \frac{a^{-6}}{a^5} = a^{-6-5} = a^{-11}$. Соответствует выражению 3).

Ответ:

А	Б	В
2	4	3

Вариант № 1

1. Вычислите $3^5 \cdot \frac{1}{3^2} \cdot 3^{-3}$.

1) 1 2) 81 3) 3 4) 9

2. Представьте выражение $\frac{(a^5 \cdot a^{-2})^6}{a^4}$, где $a \neq 0$ в виде степени с основанием a.

1) a^{14} 2) a^7 3) a^6 4) a^3

3. Найдите значение выражения $3x^2 : \frac{1}{(2x)^3} \cdot \frac{1}{3x}$ при $x = -\frac{1}{2}$.

1) 4 2) $-\frac{1}{2}$ 3) 0,5 4) 2

4. Упростите выражение $\frac{x^2y^3}{y^{-2}} \cdot \frac{x^{-3}}{y^4}, y \neq 0, x \neq 0$.

1) $\frac{1}{xy^3}$ 2) $\frac{y}{x}$ 3) $\frac{x^5}{y^5}$ 4) 1

5. Согласно результатам демографических исследований в 1244 году население Москвы как типичного городка Средневековья насчитывало около $10{,}9 \cdot 10^3$ чел., а согласно прогнозам специалистов к 2068 году численность населения Москвы будет составлять $22{,}1 \cdot 10^6$ чел. Во сколько раз возрастёт численность населения Москвы за рассматриваемый период? Ответ округлите до целых.

1) 49 2) 493 3) 202 4) 2028

6. Замените X таким выражением, чтобы равенство

$X \cdot \left(-\frac{5a^3c^4}{b^2}\right) = \frac{b^3c^2}{2a^{-1}}$ выполнялось для любых значений a, b, c, отличных от нуля.

1) $-\frac{b^5}{10a^2c^2}$ 2) $-\frac{5a^2bc^6}{2}$ 3) $-\frac{2a}{5bc^6}$ 4) $\frac{b^6c^2}{10a^2}$

7. Среди чисел $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$; 3^{-2}; $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$ найдите наибольшее.

1) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$ 2) 3^{-2} 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ 4) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$

8. Соотнесите каждое выражение

А) $(2a^{-1}b^2)^3$; Б) $2\frac{(a^2b^4)^2}{b^3a}$; В) $2\left(\frac{a}{b}\right)^2 : \frac{a^3b^{-3}}{b}$

с тождественно равным ему выражением ($a > 0, b > 0$).

1) $2a^3b^5$ 2) $2\frac{a^5}{b^6}$ 3) $8\frac{b^6}{a^3}$ 4) $2\frac{b^2}{a}$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 2

1. Представьте выражение $\frac{(a^7a^{-3})^{-2}}{a^{-6}}$ в виде степени.

1) a^2 2) a^{-4} 3) a^8 4) a^{-2}

2. Упростите выражение $(2a^2b)^3$.
1) $2a^6b^3$ 2) $8a^6b^3$ 3) $2a^5b^3$ 4) $8a^5b^3$

3. Упростите выражение $\left(\frac{a^{-3}b^4}{5}\right) \cdot \left(\frac{5}{a^{-2}b^3}\right)^{-2}$, $b \neq 0$.
1) $0{,}08a^{-7}b^{10}$ 2) $0{,}008a^{-7}b^{10}$
3) $\frac{5b^{-2}}{a}$ 4) $\frac{b^{-2}}{5a}$

4. Найдите значение выражения $8^{3a} \cdot 16^{-2a}$ при $a = -2$.
1) 4 2) $\frac{1}{4}$ 3) $-\frac{1}{4}$ 4) 8

5. Сравните x^2 и x^3, если известно, что $0 < x < 2$.
1) $x^2 > x^3$ 2) $x^2 < x^3$
3) $x^2 = x^3$ 4) для сравнения не хватает данных

6. Найдите значение выражения $(2{,}4 \cdot 10^{-3}) \cdot (3 \cdot 10^{-2})$.
1) 7 200 000 2) 0,000 72 3) 0,000 072 4) 0,000 007 2

7. Масса клетки бактерии $1{,}2 \cdot 10^{-12}$ кг. Выразите эту массу в миллиграммах.
1) $1{,}2 \cdot 10^{-9}$ мг 2) $1{,}2 \cdot 10^{-7}$ мг
3) $1{,}2 \cdot 10^{-6}$ мг 4) $1{,}2 \cdot 10^{-3}$ мг

8. Соотнесите каждое выражение

А) $(a^2a^5)^3$; Б) $a^4(a^3)^3$; В) $\left(\frac{a^5}{a^3}\right)^4$

с тождественно равным ему выражением (при $a \neq 0$).
1) a^8 2) a^{21} 3) a^{16} 4) a^{13}

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 3

1. Вычислите $3^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 3^0$.
1) 243 2) $\frac{1}{3}$ 3) 3 4) 0

2. Представьте выражение $\frac{(c^3)^{-2} \cdot c}{c^{-8}}$, $c > 0$ в виде степени с основанием c.
1) c^{10} 2) c^3 3) c^{-2} 4) c^{-1}

3. Найдите значение выражения $\frac{3}{x^5} \cdot x^3 : x^{-2}$ при $x = 0{,}001$.

1) 0,003 2) 0,03 3) 3 4) 0,3

4. Упростите выражение $(ab)^7 : \left(\frac{a}{b}\right)^3$, $b \neq 0, a \neq 0$.

1) a^4b^{10} 2) $(ab)^4$ 3) $a^{10}b^4$ 4) a^4b^{-4}

5. Масса Земли равна $5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг, масса Луны — $7{,}35 \cdot 10^{25}$ граммов. Во сколько раз масса Земли больше массы Луны? Результат округлите до сотых.

1) 0,12 2) 0,1 3) 81,36 4) 8136,05

6. Укажите промежуток, которому принадлежит значение выражения $(5 \cdot 3)^2 - \left((-5) : (-3)\right)^{-2}$.

1) $[224; 225)$ 2) $(-200; -195)$ 3) $(0; 4]$ 4) $[225; 226]$

7. Среди чисел $0{,}5^2$; $0{,}5^3$; $(-0{,}5)^{-5}$; $(-0{,}5)^{-6}$ найдите наибольшее.

1) $0{,}5^2$ 2) $0{,}5^3$ 3) $(-0{,}5)^{-5}$ 4) $(-0{,}5)^{-6}$

8. Соотнесите каждое выражение

А) $(n^{-1})^2 \cdot n^0 \cdot n^2$; Б) $\frac{(n^{-5})^{-2}}{n^4n^2}$; В) $(n^{-5})^2 \cdot n^{-4} \cdot n^{-2}$

с тождественно равным ему выражением ($n > 0$).

1) n^{-16} 2) n^4 3) n^{-13} 4) 1

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 4

1. Вычислите $2^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2^4$.

1) 1 2) 2 3) 0 4) 4

2. Представьте выражение $\frac{(a^2)^{-3} \cdot a^{10}}{a^3}$ ($a \neq 0$) в виде степени с основанием a.

1) a^8 2) a^{13} 3) a 4) a^{12}

3. Найдите значение выражения $t^7 \cdot \frac{4}{t^5} : t^3$ при $t = 2$.

1) 8 2) 128 3) 0,5 4) 2

4. Упростите выражение $3(a^2b)^3 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^5$.

1) $27a^{11} \cdot b^{-2}$ 2) $27a^{-2} \cdot b^{-2}$ 3) $\frac{3a^{11}}{b^2}$ 4) $\frac{3a^8}{b^2}$

5. Население Франции составляет 65 млн человек, а население Швеции — 9 млн человек. Во сколько раз население Франции больше населения Швеции? Результат округлите до сотых.

1) 7,22 2) 0,14 3) 8,12 4) 6,23

6. Укажите промежуток, которому принадлежит значение выражения $(6 \cdot 2)^2 - (-6) : (-2)^3$.

1) $(20; 80)$ 2) $[80; 100]$ 3) $(90; 110)$ 4) $[110; 150]$

7. Из чисел $(-0{,}3)^2$, $(-0{,}3)^3$, $(-0{,}3)^4$, $(-0{,}3)^5$ выберите наибольшее.

1) $(-0{,}3)^2$ 2) $(-0{,}3)^3$ 3) $(-0{,}3)^4$ 4) $(-0{,}3)^5$

8. Соотнесите каждое выражение

А) $(n^{-2})^2 \cdot n^4 \cdot n^0$; Б) $\frac{(n^{-3})^5}{n^{-14} \cdot n^2}$; В) $\frac{(n^2)^3}{n^3} \cdot n^{-4}$,

с тождественно равным ему выражением ($n \neq 0$).

1) $\frac{1}{n^3}$ 2) $\frac{1}{n}$ 3) $\frac{1}{n^2}$ 4) 1

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 5

1. Вычислите $6^2 \cdot (0{,}5)^3 \cdot 3^1$.

1) 864 2) 4,5 3) 27 4) 13,5

2. Найдите k, если $a^k = \frac{a^{-3} \cdot (a^2)^4}{a^{-5}}$ при $a \neq 1$.

1) 6 2) 0 3) 10 4) 7

3. Найдите значение выражения $m^2 \cdot \left(\frac{m}{2}\right)^{-3} \cdot (m^5)^0$ при $m = 8$.

1) 1 2) 8 3) 64 4) 0,125

4. Какое из следующих выражений при $a \neq 0$, $c \neq 0$ тождественно равно выражению $\frac{(a^2c)^3}{c^4} \cdot \left(\frac{c^2}{a}\right)^2$?

1) a^3c^3 2) a^5c^3 3) a^4c^3 4) a^4c

5. Макароны нужно варить $1{,}5 \cdot 10^1$ минут, а горох — $1{,}8 \cdot 10^2$ минут. Во сколько раз дольше нужно варить горох, чем макароны?

1) $\frac{5}{60}$ 2) $\frac{50}{6}$ 3) 12 4) 1,2

6. Найдите промежуток, которому принадлежит значение выражения $2^3 \cdot 3^2 - 2^2 \cdot 3^3$.

1) $[35; 36]$ 2) $[-36; -35]$ 3) $[0; 1]$ 4) $[-1; 0]$

7. Найдите наименьшее из чисел: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $(-3)^{\frac{1}{3}}$, $(-3)^{-3}$, $(-3)^{-2}$.

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ 2) $(-3)^{\frac{1}{3}}$ 3) $(-3)^{-3}$ 4) $(-3)^{-2}$

8. Соотнесите каждое из выражений

$\text{А} = \left((k^2)^{-3} \cdot k^4\right)^{-1}$; $\text{Б} = \frac{k^{-3} \cdot k^5}{k^2} : k^{-1}$; $\text{В} = \frac{\left((k^3)^{-2} \cdot k\right)^{-1}}{k^{-5}}$

с тождественно равным ему выражением ($k \neq 0$).

1) k 2) k^{10} 3) k^2 4) 1

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 6

1. Запишите выражение $\frac{(2^9)^6 \cdot 16^{-4}}{2^{42}}$ в виде степени числа 2.

1) 2^{-27} 2) 2^8 3) 2^{-21} 4) 2^{-4}

2. Найдите значение выражения $(a^{-5})^2 \cdot a^8$ при $a = 3$.

1) 3 2) $\frac{1}{9}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) 9

3. Упростите выражение $(4a^5b^{-7}) : \frac{2a^3b^{-5}}{5}$, если $a \neq 0$, $b \neq 0$.

1) $1{,}6a^8b^{-12}$ 2) a^2b^{-2} 3) $10a^2b^{-2}$ 4) $16a^8b^{-12}$

4. Найдите неверное равенство при $n \neq 0$, $m \neq 0$.

1) $\left(\frac{m^3}{m^2}\right)^5 = m^5$ 2) $a^2(n^5m)^3 = a^2n^{15}m^3$

3) $\frac{m^6}{(n^3)^2} = \frac{m^6}{n^5}$ 4) $\frac{(n^2)^4}{m^8} = \left(\frac{n}{m}\right)^8$

5. Сравните числа b^2 и b^5, если $0 < b < 1$.

1) $b^2 > b^5$ 2) $b^2 < b^5$
3) $b^2 = b^5$ 4) для ответа не хватает данных

6. Найдите значение выражения $(8 \cdot 10^{-7}) \cdot (0{,}2 \cdot 10^5)$.

1) 160 2) 0,016 3) 1600 4) 0,0016

7. Точность изготовления микросхем в современных лабораториях достигает $6{,}3 \cdot 10^{-9}$ см. Выразите эту величину в миллиметрах.

1) 0,000 000 006 3 2) 0,000 000 063 3) 0,000 000 63 4) 0,006 3

8. Соотнесите каждое выражение

$$\mathrm{А} = (2a^{-3})^3 \cdot (a^2)^2; \quad \mathrm{Б} = \frac{a^{-5} \cdot (-2a)^4}{-2a^4}; \quad \mathrm{В} = \frac{1}{8}a^4 \cdot (2a^{-3})^3$$

с тождественно равным ему выражением.

1) $-\dfrac{8}{a^5}$ 2) a^{-5} 3) $\dfrac{8}{a^5}$ 4) $\dfrac{8}{a^{-5}}$

Ответ:

А	Б	В

§ 7. Многочлены. Преобразование выражений

Основные сведения

Одночленом называют выражение, которое содержит числа, натуральные степени переменных и их произведения.

Одночлен называется представленным в **стандартном виде**, если он записан в виде произведения числового множителя, стоящего на первом месте, и степеней различных переменных.

Числовой множитель у одночлена стандартного вида называется **коэффициентом одночлена**, сумму показателей степеней переменных называют **степенью одночлена**.

Многочленом называется алгебраическая сумма одночленов.

Если все одночлены в многочлене приведены к стандартному виду и нет подобных слагаемых, то говорят, что это многочлен **стандартного вида**.

Формулы преобразования многочленов.

Для любых a, b и с верны следующие равенства:

1. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
2. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
3. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
4. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
5. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
6. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
7. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
8. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Демонстрационный вариант

1. Какое из приведённых ниже выражений тождественно равно произведению $(x - 4)(1 - y)$?

1) $-(4 - x)(y - 1)$ 2) $-(x - 4)(1 - y)$
3) $-(x - 4)(y - 1)$ 4) $(4 - y)(x - 1)$

Решение. Рассмотрим каждое из предложенных выражений.

1) $-(4 - x)(y - 1) = -(-(x - 4))(-(1 - y)) = -(x - 4)(1 - y)$ не равно тождественно $(x - 4)(1 - y)$.

2) $-(x - 4)(1 - y)$ не равно тождественно $(x - 4)(1 - y)$.

3) $-(x-4)(y-1) = -(x-4)(-(1-y)) = (x-4)(1-y)$ тождественно равно $(x-4)(1-y)$.

4) $(4-y)(x-1) = 4x - yx + 4x - 4$ не равно тождественно $(x-4)(1-y) = x - xy + 4y - 4$.

Из представленных выражений только третье тождественно равно $(x-4)(1-y)$.

Ответ: 3.

2. Упростите выражение $(3-4a)^2 + 8a(3-2a)$.

1) 9 2) $-48a - 32a^2$ 3) $9 - 32a^2$ 4) $9 - 48a$

Решение. $(3-4a)^2+8a(3-2a) = 3^2-2\cdot3\cdot4a+(4a)^2+3\cdot8a-2a\cdot8a =$
$= 9 - 24a + 16a^2 + 24a - 16a^2 = 9$.

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

3. Найдите числовое значение многочлена $3x^2 - 7xy + 4y^2$ при $x = 2$, $y = -1$.

1) -4 2) 2 3) 30 4) -2

Решение. $3x^2 - 7xy + 4y^2 = (3x^2 - 3xy) - (4xy - 4y^2) =$
$= 3x(x-y) - 4y(x-y) = (x-y)(3x-4y)$.

Подставляя в полученное выражение значения $x = 2$, $y = -1$, получим $(2-(-1))(3\cdot2 - 4\cdot(-1)) = 3\cdot(6+4) = 3\cdot10 = 30$.

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

4. Приведите выражение $y(y-9) - (3-2y)^2$ к многочлену стандартного вида.

1) $5y^2 + 3y - 9$ 2) $5y^2 - 21y - 9$ 3) $-3y^2 + 3y - 9$ 4) $y - 9$

Решение. $y(y-9) - (3-2y)^2 = y^2 - 9y - (9 - 12y + 4y^2) =$
$= y^2 - 9y - 9 + 12y - 4y^2 = -3y^2 + 3y - 9$.

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

5. Упростите выражение $A - B$, если $A = (x-2y)(x+2y)$; $B = x^2 - 4xy + 5y^2$.

1) $9y^2 + 4xy$ 2) $2x^2 - 9y^2 + 4xy$ 3) $-5y^2$ 4) $4xy - 9y^2$

Решение. По формуле сокращённого умножения
$A = (x-2y)(x+2y) = x^2 - 4y^2$.

Следовательно, $A - B = x^2 - 4y^2 - (x^2 - 4xy + 5y^2) =$
$= x^2 - 4y^2 - x^2 + 4xy - 5y^2 = 4xy - 9y^2$.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

6. Выполните умножение многочленов: $(a+2)(a^2-2a+4)$.

1) a^3+16 2) a^3+8 3) a^3+2a^2+8 4) a^3-8

Решение. По формуле сокращённого умножения $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ заданное выражение $(a+2)(a^2-2a+4)=a^3+2^3=a^3+8$.

Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

7. Разложите многочлен $5x^2-5y^2-ax+ay$ на линейные множители.

1) $(5-a)(x-y)$ 2) $(x^2-y^2)(5-a)$

3) $(x+y)(5x-5y-a)$ 4) $(x-y)(5x+5y-a)$

Решение. $5x^2-5y^2-ax+ay=5(x^2-y^2)-a(x-y)=$
$=5(x-y)(x+y)-a(x-y)=(x-y)(5(x+y)-a)=(x-y)(5x+5y-a)$.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

8. Соотнесите каждое выражение

А) $\dfrac{a-4}{4+a}$; Б) $\dfrac{4+a}{a-4}$; В) $\dfrac{4-a}{4+a}$

с тождественно равным ему выражением.

1) $-\dfrac{4-a}{4+a}$ 2) $-\dfrac{a-4}{4-a}$ 3) $\dfrac{a+4}{a-4}$ 4) $-\dfrac{a-4}{a+4}$

Решение. Преобразуем каждое из заданных выражений.

А) $\dfrac{a-4}{4+a}=\dfrac{-(4-a)}{4+a}=-\dfrac{4-a}{4+a}$. Это выражение тождественно равно выражению 1).

Б) $\dfrac{4+a}{a-4}=\dfrac{a+4}{a-4}$. Это выражение тождественно равно выражению 3).

В) $\dfrac{4-a}{4+a}=\dfrac{-(a-4)}{4+a}=-\dfrac{a-4}{a+4}$. Это выражение тождественно равно выражению 4).

Ответ:

А	Б	В
1	3	4

Вариант № 1

1. Какое из приведённых ниже выражений тождественно равно произведению $(4-x)(x-1)$?

1) $(x-4)(1-x)$ 2) $-(x-4)(1-x)$
3) $(4-x)(1-x)$ 4) $(x-4)(x-1)$

2. Упростите выражение $x^2-4-(x+1)(x-4)$.

1) $3x-8$ 2) $3x$ 3) $2x^2+3x$ 4) $2x^2-8$

3. Найдите числовое значение многочлена $4a^2-12ab+9b^2$ при $a=1{,}25$; $b=-2{,}5$.

1) 100 2) $-1{,}25$ 3) 25 4) 4,5

4. Пусть $a=5x^2+3xy-1$, $b=2x^2+10$, $c=x(y-x)$. Составьте выражение $2a-3b+c$ и приведите его к стандартному виду.

1) $3x^2+7xy-32$ 2) $13x^2-8xy-30$
3) $6x^2+4xy+9$ 4) $7x^2+3xy+9$

5. Выполните умножение многочленов $3(7a^2b-a^3)(ab^2-b^3)$ и полученное выражение приведите к стандартному виду.

1) $24a^3b^3-24a^4b^2$ 2) $-3a^4b^2-21a^2b^4$
3) $24a^3b^3-3a^4b^2-21a^2b^4$ 4) $3a^9b^9$

6. Разложите многочлен $121-(t-8)^2$ на линейные множители.

1) $(3-t)(3-t)$ 2) $(11-t)(t-8)$
3) $(57-t)(57-t)$ 4) $(19-t)(3+t)$

7. Замените буквы А, Б и В одночленами так, чтобы выполнялось равенство $(5x^3-\text{А})^2=\text{Б}-30x^3y^2+\text{В}$.

1) $\text{А}=30y^2; \text{Б}=5x^2; \text{В}=30y^2$
2) $\text{А}=6y^2; \text{Б}=25x^3; \text{В}=36y^4$
3) $\text{А}=-3y; \text{Б}=25x^5; \text{В}=9y^2$
4) $\text{А}=3y^2; \text{Б}=25x^6; \text{В}=9y^4$

8. Соотнесите, какой из многочленов

А) $4x^2+5y^2$; Б) $4x^2-y^2$; В) $(x+y)(4x-y)$

в сумме с многочленом $(x-y)^2$ даёт многочлен

1) $5x^2+6y^2-2xy$ 2) $5x^2+xy$
3) $5x^2-2xy$ 4) $5x^2+4y^2$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 2

1. Какое выражение надо подставить вместо многоточия, чтобы равенство $x^2 + x - 6 = (x - 2)(\ \dots\ )$ было верным?

1) $x - 6$ 2) $x + 3$ 3) $x + 6$ 4) $x - 3$

2. Упростите выражение $b - 2 \cdot (5 - 2b) + 3 \cdot (b - 2)$. В ответе запишите его значение при $b = 2$.

Ответ: ________________.

3. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:

$\frac{1}{3} \cdot (9y - 6) - (7y + 4)$.

1) $4y + 6$ 2) $-4y + 6$ 3) $-4y - 6$ 4) $4y - 6$

4. Замените A таким одночленом, чтобы выполнялось равенство $-6a^4b^5 \cdot A = 18a^4b^{10}$.

1) $-3ab^2$ 2) $-3b^2$ 3) $-3ab^5$ 4) $-3b^5$

5. Найдите значение выражения $(x - 2)(x + 5) - (x + 3)(x - 4)$ при $x = -4{,}5$.

Ответ: ________________.

6. Разложите на множители выражение $xy^3 + y^3 + x + 1$.

1) $(x + 1)(y + 1)(y^2 + y + 1)$ 2) $(x + 1)(y - 1)(y^2 + y + 1)$
3) $(x + 1)(y + 1)(y^2 - y + 1)$ 4) $(x + 1)(y - 1)(y^2 - y + 1)$

7. Найдите значение выражения
$(a - 2)(a + 2)(a^2 + 4)(a^4 + 16) - (a^4 - 1)^2$ при $a = 3$.

Ответ: ________________.

8. Упростите выражение $(a + 1)^3 - (a - 1)^3$.

1) 2 2) $6a(a + 1)$ 3) $2(3a^2 + 1)$ 4) $6a^2$

Вариант № 3

1. Какое выражение надо подставить вместо многоточия, чтобы равенство $-x^2 - x + 20 = (x + 5)(\ \dots\ )$ было верным?

1) $x - 4$ 2) $4 - x$ 3) $x + 20$ 4) $20 - x$

2. Найдите числовое значение многочлена $p^2 + 2pq + q^2$ при $p = 1{,}5$; $q = -1{,}5$.

1) 9 2) $-4{,}5$ 3) 0 4) $-1{,}5$

3. Приведите выражение $a(4a-1)-(1-2a)^2$ к многочлену стандартного вида.

1) $3a - 1$ 2) $-a - 1$ 3) $8a^2 - 5a - 1$ 4) $-3a + 1$

4. Упростите выражение $P + Q$, если $P = (p - 3q)(p + 3q)$; $Q = 9q^2 - 2pq - p^2$.

1) $2p^2 - 2pq$ 2) $18q^2 - 2pq$
3) $18q^2 + 2p^2$ 4) $-2pq$

5. Выполните умножение многочленов: $(5c - 3d)(25c^2 + 15cd + 9d^2)$.

1) $125c^3 - 27d^3$ 2) $125c^3 + 27d^3$
3) $125c^3 + 75cd^2 - 27d^3$ 4) $125c^3 + 75c^2d - 45cd^2 + 27d^3$

6. Найдите, при каком значении N равенство $(12c^5d^4 + 18c^4d^3) : N = -2cd - 3$ верно.

1) $N = 6c^5 \cdot d^4$ 2) $N = 6c^4 \cdot d^3$
3) $N = -6c^4 \cdot d^3$ 4) $N = -6c^5d^4$

7. Разложите многочлен $z^3 + z^2 - z - 1$ на линейные множители.

1) $(z-1)\cdot(z+1)$ 2) $(z-1)^2\cdot(z+1)$
3) $(z^2+1)\cdot(z-1)$ 4) $(z+1)^2\cdot(z-1)$

8. Соотнесите каждое выражение

А) $\dfrac{x-3}{3-x}$; Б) $\dfrac{3+x}{x-3}$; В) $\dfrac{3-x}{x+3}$

с тождественно равным ему выражением.

1) $-\dfrac{-x-3}{x-3}$ 2) $-\dfrac{-x-3}{3-x}$ 3) $-\dfrac{x-3}{3+x}$ 4) $\dfrac{3-x}{x-3}$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 4

1. Какое из следующих выражений не является тождественно равным ни одному из выражений $x^2 - y^2$ и $(x-3)(x+2)$?

1) $(x-y)(x+y)$ 2) $x^2 - x - 6$
3) $(3-x)(-x-2)$ 4) $(x-y)^2$

2. Упростите выражение $(x-8)^2 - (x^2+64)$.

1) $16x + 128$ 2) 0 3) -128 4) $-16x$

3. Найдите числовое значение многочлена $x^3 - 2xy^2 + y^3$ при $x = 2$, $y = 3$.

1) 0 2) -4 3) 3 4) -1

4. Приведите выражение $(a+1)a + (a-1)^2$ к многочлену стандартного вида.

1) $3a - 1$ 2) $-2a + 1$ 3) $2a^2 - a + 1$ 4) $a^2 + a + 1$

5. Упростите выражение $A - B$, если $A = (2x - y)(x + 2y)$, $B = (x+y)^2 - 3y^2 - 5xy$.

1) $6xy - 4y^2$ 2) $x^2 + 2y^2$ 3) $x^2 - 2y^2$ 4) $x^2 + 6xy$

6. Выполните умножение многочленов: $(a - 2b)(2a^2 - 3ab - 2b^2)$.

1) $2a^3 + 7a^2b - 4ab^2 + 4b^3$ 2) $2a^3 - 7a^2b + 4ab^2 + 4b^3$
3) $2a^3 - 7a^2b + 4ab^2 - 4b^3$ 4) $2a^3 + 7a^2b + 4ab^2 + 4b^3$

7. Найдите, при каком значении x равенство $(24c^7d^5 - 18c^6d^6) : x = (3d - 4c)$ верно.
1) $6c^6d^5$ 2) $-2c^5d^6$ 3) $-6c^6d^5$ 4) $2c^5d^6$

8. Разложите многочлен $y^3 + 2y^2 - 4y - 8$ на линейные множители.
1) $(y + 2)^2(y - 2)$ 2) $(y - 2)^2(y + 2)$
3) $(y + 2)(y^2 + 2)$ 4) $(y - 4)(y + 2)^2$

Вариант № 5

1. Какое из следующих выражений не является тождественно равным ни одному из выражений $(a - b)^2$ и $(a - 4)(b + 4)$?
1) $a^2 - b^2$ 2) $ab + 4(a - b) - 16$
3) $a^2 - 2ab + b^2$ 4) $(4 - a)(-b - 4)$

2. Упростите выражение $(x + 2)^2 - (4 - x^2)$.
1) 0 2) $2x^2$ 3) $4x$ 4) $2x^2 + 4x$

3. Найдите числовое значение многочлена $xy - 3y + 4x - 12$ при $x = 2$, $y = 1{,}4$.
1) 5,4 2) −4,4 3) −4,6 4) −5,4

4. Представьте выражение $a(a - b)(a + b) + (a - 1)(b^2 + 5)$ в виде алгебраической суммы одночленов.
1) $a^3 - 2b^2 + 5a - 5$ 2) $a^3 - b^2 + 5a - 5$
3) $a^3 - ab^2 + 5a - 5$ 4) $a^3 + 2ab^2 - b^2 + 5a - 5$

5. Упростите выражение $A^2 + B$, где $A = a - b^2$, $B = (2a - b^2)(b^2 + 4)$.
1) $8a - 4b^2$ 2) $a^2 + 8a - 4b^2$
3) $a^2 + 2b^4 + 8a - 4b^2$ 4) $a^2 - 4ab^2 + 8a - 4b^2$

6. Выполните умножение многочленов: $(m - n + 1)(m + n + 1)$.
1) $m^2 - n^2 + 1$ 2) $m^2 + 2m + 1 - n^2$
3) $m^2 - 2n + 2m - n^2 + 1$ 4) $m^2 - n^2 - 1$

7. Найдите такой многочлен p, при котором многочлены $c^2 - a$ и $(c^3 - 2a^3 + 2a^2c^2 - ac) \cdot p^{-1}$ тождественно равны.
1) $2a^2 - c$ 2) $a^2 + 2c$ 3) $2a^2 + a - c$ 4) $2a^2 + c$

8. Разложите многочлен $a^3 - 4a^2 - 4a + 16$ на линейные множители.
1) $(a - 2)^2(a + 2)$ 2) $(a - 2)(a + 2)(a + 4)$
3) $(a - 2)(a + 2)(a - 4)$ 4) $(a - 4)^3$

Вариант № 6

1. Укажите выражение, тождественно равное выражению $(3x-5)^2$.

1) $9x^2-30x+25$ 2) $9x^2-15$
3) $9x^2-15x+25$ 4) $9x^2-25$

2. Какое выражение нужно подставить вместо многоточия, чтобы равенство $(x^2-4)(\ \dots\ )=x^3-x^2-4x+4$ было верным?

1) x^2+1 2) $x-4$ 3) $x-1$ 4) x^2+4

3. Найдите значение выражения $(m+2)(3-m)-3m(1+m)$ при $m=-1$.

Ответ: ________________.

4. Укажите выражение, не являющееся одночленом.

1) $3a^3b^2$ 2) $-4{,}7$ 3) $31a^3b^2c^5$ 4) $-a^2+7b$

5. Приведите к стандартному виду одночлен $-2a^2b^3\cdot 0{,}5ab^2$.

1) $-a^3b^5$ 2) $-a^3b^6$ 3) $-10a^3b^5$ 4) $10a^3b^6$

6. Выполните умножение $a^2(a^3-2a^4)$. В ответе укажите степень получившегося многочлена.

Ответ: ________________.

7. Найдите значение выражения $(x-3)^2-2(x-3)(x+3)+(x+3)^2$ при $x=-\dfrac{11}{13}$.

Ответ: ________________.

8. Упростите выражение $(2+x)^3+(x-1)^2-10x$.

1) $2x^2-8x+8$ 2) $x^3-8x+3x^2+12$
3) $2x^3+8x+3x^2+8$ 4) x^3+7x^2+9

§ 8. Алгебраические дроби. Преобразования рациональных выражений[1]

Основные сведения

Алгебраическим (буквенным) выражением называется одна или несколько алгебраических величин (чисел и букв), соединённых между собой знаками алгебраических действий: сложения, вычитания, умножения и деления, извлечения корня и возведения в целую степень, а также скобками, определяющими порядок выполнения действий. Количество величин, входящих в алгебраическое выражение, должно быть конечным.

Значения переменных, при которых алгебраическое выражение имеет смысл, называют **допустимыми значениями** переменных. Множество всех допустимых значений переменных называют **областью определения** алгебраического выражения.

Если соответственные значения двух выражений с одинаковой областью определения, содержащих одни и те же переменные, совпадают при всех допустимых значениях переменных, то выражения называют **тождественно равными**.

Тождеством называют равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных.

Основное свойство дроби: $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}, b \neq 0, c \neq 0.$

Действия с дробями (предполагается, что знаменатели дробей отличны от нуля):

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \qquad -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

[1] Все преобразования в заданиях этого параграфа выполняются на множестве допустимых значений.

Демонстрационный вариант

1. Укажите все значения c, при которых выражение $\dfrac{c+3}{c(c-1)}$ не имеет смысла.

1) 3 2) 0; 3 3) 1 4) 0; 1

Решение. Заданное выражение не имеет смысла, когда $c(c-1)=0$, то есть $c=0$ или $c=1$.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

2. Представьте выражение $2x+\dfrac{1-3x^2}{x}$ в виде дроби.

Решение. $2x+\dfrac{1-3x^2}{x}=\dfrac{2x\cdot x+1-3x^2}{x}=\dfrac{1-x^2}{x}$.

Ответ: $\dfrac{1-x^2}{x}$.

3. Запишите алгебраическую дробь, числитель которой равен квадрату разности чисел m и n, а знаменатель — удвоенной разности этих чисел.

1) $\dfrac{(m+n)^2}{2m+2n}$ 2) $\dfrac{(m-n)^2}{2mn}$ 3) $\dfrac{(m-n)^2}{2(m-n)}$ 4) $\dfrac{m^2-n^2}{2(m-n)}$

Решение. Выражение «квадрат разности чисел m и n» записывается в виде $(m-n)^2$ — числитель дроби. Запись выражения «удвоенная разность чисел m и n» имеет вид $2(m-n)$ — знаменатель дроби. Следовательно, указанной в условии записи соответствует выражение 3).

Ответ: 3.

4. Найдите, при каком значении x пропорция $\dfrac{x}{6d}=\dfrac{5c^2d^4}{cd^2}$ верна ($c\neq 0$, $d\neq 0$).

1) $30cd^3$ 2) $6cd$ 3) $5d^2$ 4) $5cd$

Решение. По условию пропорция верна, значит,

$x=\dfrac{5c^2d^4\cdot 6d}{cd^2}=\dfrac{30c^2d^5}{cd^2}=30cd^3$.

Из предложенных значений верным является 1).

Ответ: 1.

5. Выполните вычитание дробей: $\dfrac{12}{3b+b^2}-\dfrac{4}{b}$, $b\neq 0$.

1) $\dfrac{1}{3+b}$ 2) $-\dfrac{1}{3+b}$ 3) $\dfrac{4}{3+b}$ 4) $-\dfrac{4}{3+b}$

Решение. $\frac{12}{3b+b^2}-\frac{4}{b}=\frac{12}{b(3+b)}-\frac{4}{b}=\frac{12-4(3+b)}{b(3+b)}=$

$=\frac{12-12-4b}{b(3+b)}=-\frac{4}{3+b}.$

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

6. Выполните деление дробей: $\frac{(a+3)^2}{2a-4}:\frac{3a+9}{a^2-4}.$

1) $\frac{2a^2-6a+3}{a-2}$ 2) $\frac{a^2+5a+6}{6}$

3) $\frac{2a^2+5a+1}{6}$ 4) $\frac{a^2-5a+6}{a+3}$

Решение. $\frac{(a+3)^2}{2a-4}:\frac{3a+9}{a^2-4}=\frac{(a+3)^2}{2a-4}\cdot\frac{a^2-4}{3a+9}=$

$=\frac{(a+3)^2(a-2)(a+2)}{2(a-2)\cdot 3(a+3)}=\frac{(a+3)(a+2)}{6}=\frac{a^2+5a+6}{6}.$

Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

7. Упростите выражение $\frac{x^2+xy}{x^2-y^2}\cdot\left(\frac{y^2+xy}{x+y}-x\right)^2$ и найдите его значение при $x=-2$ и $y=3$.

Решение. $\frac{x^2+xy}{x^2-y^2}\cdot\left(\frac{y^2+xy}{x+y}-x\right)^2=$

$=\frac{x(x+y)}{(x-y)(x+y)}\cdot\left(\frac{y(y+x)}{x+y}-x\right)^2=\frac{x}{x-y}\cdot(y-x)^2=x(x-y).$

Подставляя в полученное выражение значения $x=-2$ и $y=3$, получим $-2(-2-3)=10$.

Ответ: 10.

8. Соотнесите каждое выражение

А) $\frac{1}{x^2-8x}$; Б) $\frac{4}{x^2+9}$; В) $\frac{2x}{4x-8}$

с областью его определения.

1) $x\neq 2$ 2) любое число 3) $x\neq 8,\ x\neq 0$ 4) $x\neq 0,\ x\neq 2$

Решение. Областью определения выражения А является множество R за исключением значений x, при которых $x^2-8x=0$. Следовательно, выражение определено при $x\neq 8$ и $x\neq 0$, что соответствует ответу 3).

Областью определения выражения Б является всё множество R (знаменатель данного выражения всегда положителен), что соответствует ответу 2).

Областью определения выражения В является множество R за исключением значений x, при которых знаменатель $4x - 8 = 0$. Следовательно, выражение определено при $x \neq 2$, что соответствует ответу 1).

Ответ:

А	Б	В
3	2	1

Вариант № 1

1. Представьте выражение $x - \dfrac{x^2 - 5}{x}$ в виде дроби.

Ответ: ________________.

2. Сократите дробь $\dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 6x + 9}$.

1) $x + 3$ 2) $\dfrac{x+9}{x-9}$ 3) $\dfrac{x^2 + 3x + 9}{x - 3}$ 4) $\dfrac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 6x + 9}$

3. Упростите выражение $(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2) - y^2(y - 1) - 7x^3$.

1) $x^3 + y^2$ 2) $y^2 - y^3 - 3x^2$ 3) $2xy - 3x^2$ 4) $4x^2 + y^2$

4. Укажите все значения b, при которых равенство $\dfrac{3}{b-1} = \dfrac{3b}{b^2 - b}$ не имеет смысла.

Ответ: ________________.

5. Соотнесите каждое выражение

А) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x-2}$; Б) $\dfrac{x-2}{2x-1}$; В) $\dfrac{2x-4}{x}$

с областью его определения.

1) любое число 2) $x \neq 0$, $x \neq 2$ 3) $x \neq 0{,}5$ 4) $x \neq 0$

Ответ:

А	Б	В

6. Выполните сложение дробей $\dfrac{5x+2}{x^3 - 8} + \dfrac{x-1}{x^2 + 2x + 4}$.

1) $\dfrac{x+1}{x^2 + 2x + 4}$ 2) $\dfrac{1}{x-2}$ 3) $\dfrac{5x+2}{x^2 + 2x + 4}$ 4) $\dfrac{6x^2 + 1}{x^3 - 8}$

7. Выполните деление дробей $\dfrac{6a-3ab}{b^2+4b+4} : \dfrac{3a}{b^2-4}$.

1) $\dfrac{3a}{b+4}$ 2) $-\dfrac{b^2-4}{(b+2)^2}$ 3) $-\dfrac{(b-2)^2}{b+2}$ 4) $\dfrac{b-2}{b+2}$

Ответ: ________________.

8. Упростите выражение $\dfrac{(5-x)^2}{2x} \cdot \dfrac{6x^2}{x^2-10x+25}$ и найдите его значение при $x = -0,02$.

Ответ: ________________.

Вариант № 2

1. Представьте выражение $3x - \dfrac{2+5x^2}{2x}$ в виде дроби.

Ответ: ________________.

2. Упростите выражение $\dfrac{a^3-3a^2b}{b} : \left(1 + \dfrac{b}{2b-a}\right)$.

1) $\dfrac{a^3-2a^2b}{b}$ 2) $\dfrac{2b-a}{b}$ 3) $\dfrac{a^2(a-3b)}{2b-a}$ 4) $1 + \dfrac{b}{2b-a}$

3. Укажите все значения a, при которых выражение $\dfrac{a}{3-a} - \dfrac{3}{2-a}$ не имеет смысла.

1) $a = 0$ 2) $a = 3,\ a = 2$ 3) $a \leqslant 3$ 4) $a \geqslant 2$

4. Соотнесите каждое выражение

А) $2x + \dfrac{x^3}{x(x-6)}$; Б) $\dfrac{1}{x^2+36}$; В) $\dfrac{2}{x^2-36}$

с областью его определения.

1) любое число 2) $x \neq 0,\ x \neq 6$
3) $x \neq -6,\ x \neq 6$ 4) $x \neq 0,\ x \neq -6$

Ответ:

А	Б	В

5. Упростите выражение $\dfrac{a^2+b^2}{ab} - \dfrac{a^3+b^3}{a^2b-b^3} : \dfrac{a^2+ab}{a^2-b^2}$.

Ответ: ________________.

6. Сократите дробь $\dfrac{8a^2-16a+8}{2a-2}$.

1) $4a+1$ 2) $4(a-1)$ 3) $8(a^2+1)$ 4) $8(a-1)$

7. Упростите выражение $\frac{a^2+ab}{b} \cdot \frac{a^2-ab}{a^2-b^2} \cdot \frac{b}{a}$.

Ответ: ______________.

8. Сократите дробь $\frac{(2a^2-5a-12)\cdot(2a+3)}{4a^2+12a+9}$ и найдите его значение при $a=-2,1$.

Ответ: ______________.

Вариант № 3

1. Представьте выражение $\frac{4-5x^2}{x}+2x$ в виде дроби.

Ответ: ______________.

2. Укажите все значения c, при которых выражение $\frac{c+8}{c(c+8)}$ не имеет смысла.

1) $c=0$ 2) $c=8$ 3) $c=0$, $c=-8$ 4) $c=-8$, $c=8$

3. Соотнесите каждое выражение

А) $5x+\frac{x^3}{x(x-3)}$; Б) $\frac{1}{x^2+4}$; В) $\frac{2}{x^2-4}$

с областью его определения.

1) любое число 2) $x\neq 0$, $x\neq 3$
3) $x\neq -2$, $x\neq 2$ 4) $x\neq 0$, $x\neq -3$

Ответ:

А	Б	В

4. Найдите, при каком значении a пропорция $\frac{a}{5}=\frac{c^4d}{cd}$ верна ($c\neq 0$, $d\neq 0$).

1) $a=5c^3d$ 2) $a=5c^3$ 3) $a=\frac{c^3}{5}$ 4) $a=\frac{1}{5}c^3d^2$

5. Выполните вычитание дробей $\frac{3b}{ab+b}-\frac{5a}{a^2+a}$ ($a\neq 0$, $b\neq 0$).

1) $-\frac{2}{(a+1)}$ 2) $\frac{3b^2-5a^2}{a^2b+ab}$
3) $\frac{2}{(a+1)}$ 4) $\frac{5a^2-3b^2}{a^2b+ab}$

6. Выполните деление дробей $\dfrac{25m}{m-n} : \dfrac{15m^3}{m^2-n^2}$.

1) $\dfrac{5(m+n)}{3m}$ 2) $\dfrac{5(m+n)}{3m^2}$ 3) $\dfrac{5(m-n)}{3m^2}$ 4) $\dfrac{5}{3}m^2$

7. Сократите дробь $\dfrac{2a^2+5a}{25-4a^2} \cdot (5-2a)$.

Ответ: ________________.

8. Выполните умножение $\dfrac{2x-5}{x+2} \cdot \dfrac{x^2-4}{2x-4} - x$. Найдите его значение при $x = 2,18$.

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. Представьте выражение $\dfrac{x-x^2+1}{x} + x$ в виде дроби.

Ответ: ________________.

2. Укажите все значения x, при которых выражение $\dfrac{x^2-1}{(x+1)(x+2)}$ не имеет смысла.

1) $x=-1$
2) $x=-1,\ x=-2$
3) $x=-2$
4) $x=-2,\ x=-1,\ x=1$

3. Соотнесите каждое выражение

А) $5\sqrt{a}+\dfrac{a^5}{a+2}$; Б) $\dfrac{2a}{\sqrt{a^2+9}}$; В) $\dfrac{a+1}{a^2-1}$

с областью его определения.

1) $a \neq -3,\ a \neq 3$ 2) любое число
3) $a \geqslant 0$ 4) $a \neq 1,\ a \neq -1$

Ответ:

А	Б	В

4. При каких значениях x пропорция $\dfrac{2}{x} = \dfrac{m^6n^3}{m^4n}$ верна ($m \neq 0,\ n \neq 0$)?

1) $\dfrac{2}{m^2n^2}$ 2) $\dfrac{mn}{2}$ 3) $\dfrac{m^3n}{2}$ 4) $\dfrac{2}{m^3n}$

5. Выполните сложение дробей $\frac{y+1}{xy-y}+\frac{1}{x^2-x}$.

1) $\frac{x+y}{x-1}$ 2) $\frac{xy+y}{x-1}$ 3) $\frac{xy+x+y}{x^2y-xy}$ 4) $\frac{xy-x-y}{xy(x-1)}$

6. Выполните умножение дробей $\frac{12a}{a+b}\cdot\frac{a^2-b^2}{4a^2}$.

1) $3\left(1+\frac{b}{a}\right)$ 2) $\frac{3a}{a-b}$ 3) $\frac{3b}{b-a}$ 4) $3\left(1-\frac{b}{a}\right)$

7. Упростите выражение $\left(\frac{4}{b}-\frac{8}{b^2+2b}\right):\frac{1}{b+2}$. Найдите его значение при $b=1,7$.

Ответ: ________________.

8. Сократите дробь $\frac{(3a^2-7a)\cdot(3a+7)}{49-9a^2}$.

Ответ: ________________.

Вариант № 5

1. Представьте выражение $\frac{3x^2-3x+1}{3x}-x$ в виде дроби.

Ответ: ________________.

2. Найдите x, если известно, что отношение $x+4a$ к a^2-b^2 равно отношению a^2+4 к $a+b$.

1) a^3-a^2b-4b 2) $a^3-a^2b-8a-4b$
3) a^3+a^2b-4b 4) a^3+a^2b+4b

3. Определите, при каких значениях x дробь $\frac{x+5}{(x^2+3x-4)x}$ не имеет смысла.

Ответ: ________________.

4. Соотнесите каждое выражение с областью его определения.

А) $\frac{x^2-4}{x^2+9}-3$ Б) $x^2+9-\frac{1}{x^2-9}$ В) $\frac{x+3}{x-3}+3$

1) $x\neq\pm3$ 2) x – любое число 3) $x\neq\pm2, x\neq\pm3$ 4) $x\neq3$

Ответ:

А	Б	В

5. Выполните вычитание дробей $\dfrac{a-4b}{a^2+2ab+b^2}-\dfrac{1}{a+b}$,

Ответ: ________________.

6. Выполните действия $\dfrac{a^2-5a}{a^2-4}-\dfrac{2a^2-a}{a(a-2)}+\dfrac{2a+2}{a(a+2)}$.

1) $\dfrac{a^2}{2(a^2-4)\cdot a}$ 2) $\dfrac{-a^3-6a^2-4}{a(a^2-4)}$ 3) $\dfrac{2a^3}{2a(a^2-4)}$ 4) $\dfrac{a+1}{a^2-4}$

7. Упростите выражение $\dfrac{m^3-m}{m^2+m-2}:\dfrac{m+1}{m^2-4}$. Найдите его значение при $m=2,1$.

Ответ: ________________.

8. Выполните деление $\dfrac{a^2+3a-4}{a^2-16}:\dfrac{a-1}{2a-8}$.

Ответ: ________________.

Вариант № 6

1. Выполните действия

$x:\dfrac{3x-5}{6x^2-7x-5}$.

Ответ: ________________.

2. Найдите, при каком значении Q верно равенство

$\dfrac{a^2-9}{14a^3}\cdot Q=\dfrac{a-3}{2a}$.

1) $\dfrac{7a^2}{3+a}$ 2) $\dfrac{a+3}{7a}$ 3) $7a^2$ 4) $a+3$

3. Из перечисленных ниже значений переменной x выберите те, при которых определено значение функции $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2}$.

1) $x=1, x=2$ 2) $x=3$ 3) $x=1$ 4) $x=2$

4. Соотнесите каждое выражение с областью его определения.

А) $\dfrac{3m+1}{9m^2-1}$ Б) $\dfrac{3m-1}{3m+1}$ В) $\dfrac{1}{(3m-2)(3m+1)}$

1) $m\neq\dfrac{1}{3}$ 2) $m\neq\pm\dfrac{1}{3}$ 3) $m\neq-\dfrac{1}{3}$ 4) $m\neq-\dfrac{1}{3}, m\neq\dfrac{2}{3}$

Ответ:

А	Б	В

5. Сократите дробь $\dfrac{(4a+b)^2-(4a-b)^2}{16ab}$, $a \neq 0, b \neq 0$.

1) 1   2) $\dfrac{b}{8a}$ 3) $-\dfrac{b}{8a}$ 4) $\dfrac{1}{16}$

6. Найдите значение выражения $\dfrac{a^3c-ac^3}{a^2-ac}$ при $a=0{,}2$ и $c=-0{,}1$.

Ответ: ________________ .

7. Сократите дробь $\dfrac{(2xy+3x-2x^2-3y)\cdot(x+y)}{x^2-y^2}$.

Ответ: ________________ .

8. Упростите выражение

$$\frac{1}{3b-1}-\frac{27b^3-3b}{9b^2+1}\cdot\left(\frac{3b}{9b^2-6b+1}-\frac{1}{9b^2-1}\right),\ b\neq\pm\frac{1}{3}.$$

Ответ: ________________ .

§ 9. Квадратные корни

Основные сведения

Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a.

При любом $a \geqslant 0$ выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл. Если $a < 0$, то выражение $\sqrt{a}$ не имеет смысла.

Из определения арифметического корня следует, что если выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл, то $\sqrt{a} \geqslant 0$ и $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Свойства арифметического квадратного корня.

1) Квадратный корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению квадратных корней из этих множителей, то есть если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

2) Квадратный корень из дроби с неотрицательным числителем и положительным знаменателем равен частному от деления квадратного корня из числителя на квадратный корень из знаменателя, то есть если $a \geqslant 0$, $b > 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

3) При любом значении a и натуральном k верно равенство $\sqrt{a^{2k}} = |a^k|$.

4) Если $a > b \geqslant 0$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

Демонстрационный вариант

1. Из чисел $3\sqrt{2}$; $\sqrt{15}$; 4; $5\sqrt{3}$ выберите наибольшее.

1) 4 2) $\sqrt{15}$ 3) $5\sqrt{3}$ 4) $3\sqrt{2}$

Решение. $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}$; $4 = \sqrt{16}$; $5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{75}$. Следовательно, наибольшим из перечисленных чисел является $5\sqrt{3}$. Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

2. Какое из данных выражений равно выражению $\frac{\sqrt{12}}{5}$?

1) $\sqrt{\frac{12}{5}}$ 2) $4\sqrt{\frac{3}{5}}$ 3) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ 4) $\frac{\sqrt{12} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

Решение. Используя свойства арифметических корней, преобразуем каждое из предложенных выражений.

Выражение 1: $\sqrt{\frac{12}{5}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{12}\cdot\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{60}}{5}$; $\frac{\sqrt{60}}{5} \neq \frac{\sqrt{12}}{5}$.

Выражение 2: $4\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{4\sqrt{15}}{5}$; $\frac{4\sqrt{15}}{5} \neq \frac{\sqrt{12}}{5}$.

Выражение 3: $\frac{2\sqrt{3}}{5} = \frac{\sqrt{12}}{5}$; $\frac{\sqrt{12}}{5} = \frac{\sqrt{12}}{5}$.

Выражение 4: $\frac{\sqrt{12}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{12} \neq \frac{\sqrt{12}}{5}$.

Ответ: 3.

3. Вычислите $\sqrt{1\frac{24}{25}} - 3\sqrt{0{,}09}$.

1) 0,3 2) 0,5 3) −0,3 4) −0,5

Решение. $\sqrt{1\frac{24}{25}} - 3\sqrt{0{,}09} = \sqrt{\frac{49}{25}} - 3\cdot 0{,}3 = \frac{7}{5} - 0{,}9 = 1{,}4 - 0{,}9 = 0{,}5$.

Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

4. Упростите выражение $(8\sqrt{18} + 6\sqrt{24} - \sqrt{72}) : (2\sqrt{6})$.

1) $3\sqrt{3} - 12$ 2) $3\sqrt{3} + 6$ 3) $\sqrt{3} - 4$ 4) 12

Решение. $(8\sqrt{18} + 6\sqrt{24} - \sqrt{72}) : (2\sqrt{6}) = \frac{8\sqrt{18}}{2\sqrt{6}} + \frac{6\sqrt{24}}{2\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{72}}{2\sqrt{6}} =$

$= 4\sqrt{\frac{18}{6}} + 3\sqrt{\frac{24}{6}} - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{72}{6}} = 4\sqrt{3} + 6 - \sqrt{3} = 3\sqrt{3} + 6$.

Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

5. Сократите дробь $\frac{49 - y}{7 - \sqrt{y}}$, если $\sqrt{y} \neq 7$.

1) $7 + \sqrt{y}$ 2) $\frac{1}{7 + \sqrt{y}}$ 3) $7 + y$ 4) $\sqrt{7} - \sqrt{y}$

Решение. $\frac{49 - y}{7 - \sqrt{y}} = \frac{(7 - \sqrt{y})(7 + \sqrt{y})}{7 - \sqrt{y}} = 7 + \sqrt{y}$.

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

6. Упростите, исключив иррациональность из знаменателя дроби

$\frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(4 + \sqrt{15})}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$.

Решение. $\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(4+\sqrt{15})}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2(4+\sqrt{15})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} =$

$\dfrac{(5-2\sqrt{15}+3)(4+\sqrt{15})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \dfrac{2(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})}{2} = 16-15 = 1.$

Ответ: 1.

7. Найдите значение выражения $x^2 - 3\sqrt{2}x + 2$, если $x = \sqrt{2}+1$.

1) $-\sqrt{2}-1$ 2) $\sqrt{2}+1$ 3) $\sqrt{2}-1$ 4) $1-\sqrt{2}$

Решение. Подставляя в заданное выражение значение x, получим $(\sqrt{2}+1)^2 - 3\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)+2 = 2+2\sqrt{2}+1-3\cdot 2-3\sqrt{2}+2 = -1-\sqrt{2}$.

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

8. Найдите наименьшее целое число, входящее в область допустимых значений выражения $\dfrac{\sqrt{3x-19}}{x-7}$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} 3x-19 \geqslant 0, \\ x-7 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 6\frac{1}{3}, \\ x \neq 7. \end{cases}$

Следовательно, наименьшим целым числом, входящим в область допустимых значений, является 8.

Ответ: 8.

Вариант № 1

1. Расположите в порядке возрастания числа $\sqrt{6}$; $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$.

1) $\sqrt{6}$; $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$ 2) $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$

3) $\sqrt{5}$; $2\sqrt{3}$; $\sqrt{6}$; $3\sqrt{2}$ 4) $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$; $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{2}$

2. Какое из данных выражений равно $\dfrac{4}{\sqrt{18}}$?

1) $\sqrt{\dfrac{2}{9}}$ 2) $4\sqrt{\dfrac{2}{9}}$ 3) $\dfrac{4}{3\sqrt{2}}$ 4) $\dfrac{3}{2\sqrt{9}}$

3. Вычислите $\sqrt{3\frac{2}{9}} \cdot \sqrt{2\frac{23}{29}}$.

1) $2\sqrt{\dfrac{23}{29}}$ 2) $3\sqrt{2\dfrac{11}{29}}$ 3) 3 4) 4

4. Упростите выражение $\left(\sqrt{27}-2\sqrt{\dfrac{1}{3}}+\sqrt{12}\right)\cdot\sqrt{12}$.

1) 12 2) 26 3) 36 4) 21

5. Сократите дробь $\dfrac{x+\sqrt{8x}+2}{x+\sqrt{2x}-2\sqrt{x}-2\sqrt{2}}$.

1) $\sqrt{x}+2$ 2) $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ 3) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}-2}$ 4) $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$

6. Вычислите $-\sqrt{0{,}2}\cdot(\sqrt{98}\cdot\sqrt{10}+\sqrt{1{,}8})$.

1) $\sqrt{0{,}2}$ 2) $\sqrt{2}$ 3) $-14{,}6$ 4) $-13{,}4$

7. Найдите значение выражения $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{b}:\dfrac{1}{a}$, если $a=5$, $b=4$.

1) 0,65 2) 1,35 3) 1,75 4) 0,55

8. Сколько целых чисел принадлежит промежутку $(\sqrt{17};\ \sqrt{121}]$?

Ответ: ________________.

Вариант № 2

1. Укажите наибольшее из перечисленных чисел: $2\sqrt{7}$; $\sqrt{13}$; 4,5.

1) $2\sqrt{7}$ 2) $\sqrt{13}$ 3) 4,5 4) нет такого числа

2. Какое из данных выражений **не** равно $\dfrac{\sqrt{45}}{2}$?

1) $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ 2) $\sqrt{\dfrac{45}{4}}$ 3) $\dfrac{15}{2\sqrt{5}}$ 4) $\sqrt{\dfrac{45}{2}}$

3. Вычислите $\dfrac{\sqrt[3]{32}\cdot\sqrt[6]{36}}{\sqrt[9]{27}}$.

1) 12 2) $\dfrac{4}{3}$ 3) $\dfrac{128}{3}$ 4) 4

4. Вычислите $\left(8\sqrt{12}+4\sqrt{75}\right):(3\sqrt{3})$.

1) 116 2) 4 3) 36 4) 12

5. Вычислите $\left(3-\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{14+6\sqrt{5}}$.

Ответ: ________________.

6. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{28}\cdot 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}}$.

1) 6 2) $\sqrt{7}$ 3) $2\sqrt{2}$ 4) $3\sqrt{2}$

7. Одна из точек на координатной прямой (см. рис. 18) соответствует числу $\sqrt{173}$. Какая это точка?

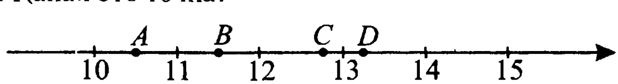


Рис. 18.

1) A 2) B 3) C 4) D

8. Упростите выражение $\frac{1}{x+1}\sqrt{x^2+6x+9}$ при $x > -3$.

1) 1 2) 0 3) $\frac{2x+3}{x+1}$ 4) $1+\frac{2}{x+1}$

Вариант № 3

1. Из чисел $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{2}$; $\sqrt{11}$; $\sqrt{17}$ выберите наибольшее.

1) $2\sqrt{3}$ 2) $3\sqrt{2}$ 3) $\sqrt{11}$ 4) $\sqrt{17}$

2. Какое из данных выражений **не** равно $\frac{2}{\sqrt{28}}$?

1) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ 2) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ 3) $\sqrt{\frac{1}{14}}$ 4) $\frac{\sqrt{28}}{14}$

3. Вычислите $\sqrt{10\frac{1}{36}\cdot 5\frac{4}{9}}$.

1) $\frac{5\sqrt{2}}{18}$ 2) $\frac{10}{18}$ 3) $\frac{133}{18}$ 4) $\frac{\sqrt{200}}{18}$

4. Упростите выражение $(4\sqrt{45}+2\sqrt{80}-\sqrt{20}) : 2\sqrt{5}$.

1) 9 2) $2+2\sqrt{3}$ 3) 10 4) $6-\sqrt{5}$

5. Сократите дробь $\frac{x-7}{\sqrt{x}+\sqrt{7}}$.

1) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{7}}$ 2) $\sqrt{x}+\sqrt{7}$

3) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{7}}$ 4) $\sqrt{x}-\sqrt{7}$

6. Вычислите, исключив иррациональность из знаменателя,
$\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{7})\cdot(\sqrt{21}+5)}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$.

Ответ: ________________.

7. Найдите значение выражения $2a^2-3ab+2b^2$, если $a=\sqrt{3}+\sqrt{2}$; $b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

1) 19 2) 17 3) $17+8\sqrt{6}$ 4) $23+8\sqrt{6}$

8. Упростите выражение $(x-7)\cdot\sqrt{\frac{1}{x^2-14x+49}}$ при $x < 7$.

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. Из чисел $3\sqrt{3}$; $2\sqrt{7}$; $\sqrt{26}$; $\sqrt{22}$ выберите наибольшее.
   1) $3\sqrt{3}$ 2) $2\sqrt{7}$ 3) $\sqrt{26}$ 4) $\sqrt{22}$

2. Какое из данных выражений равно $\frac{3\sqrt{2}}{7}$?
   1) $\sqrt{\frac{6}{49}}$ 2) $\frac{\sqrt{18}}{7}$ 3) $4\sqrt{\frac{2}{7}}$ 4) $\frac{\sqrt{6}}{7}$

3. Вычислите $\sqrt{1\frac{7}{9}\cdot 4{,}5}$.
   1) $2\sqrt{2}$ 2) 2 3) 3 4) $\sqrt{2}$

4. Упростите выражение $(\sqrt{27}-2\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.
   1) 1 2) -1 3) 3 4) -3

5. Сократите дробь $\frac{a-9}{\sqrt{a}+3}$.
   1) $\sqrt{a}-3$ 2) $\frac{1}{\sqrt{a}+3}$ 3) $\frac{1}{\sqrt{a}-3}$ 4) $3+\sqrt{a}$

6. Вычислите, исключив иррациональность из знаменателя,
   $\frac{(2\sqrt{3}-3)\cdot(7+4\sqrt{3})}{\sqrt{12}+3}$.
   Ответ: ________________.

7. Найдите значение выражения $2u^2+5uv-3v^2$, если $u=\sqrt{6}$, $v=\sqrt{24}$.
   1) 12 2) $\sqrt{24}-2$ 3) 0 4) $18-\sqrt{24}$

8. Упростите выражение $(x-2)^2\sqrt{\frac{1}{4-4x+x^2}}$ при $x>2$.
   Ответ: ________________.

Вариант № 5

1. Расположите числа $5\sqrt{2}$; 7; $3\sqrt{8}$; $4\sqrt{3}$ в порядке возрастания.
   1) 7; $4\sqrt{3}$; $5\sqrt{2}$; $3\sqrt{8}$ 2) $4\sqrt{3}$; 7; $5\sqrt{2}$; $3\sqrt{8}$
   3) $5\sqrt{2}$; 7; $4\sqrt{3}$; $3\sqrt{8}$ 4) $3\sqrt{8}$; $5\sqrt{2}$; 7; $4\sqrt{3}$

2. Какое из данных выражений равно $\frac{\sqrt{8}}{4\sqrt{3}}$?
   1) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ 2) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 3) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 4) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

3. Вычислите $\sqrt{\frac{289}{8}} : \sqrt{\frac{25}{32}}$.

1) $\frac{17}{5}\sqrt{2}$ 2) $\frac{17 \cdot 5}{16}$ 3) 6,8 4) $\frac{17}{10}\sqrt{2}$

4. Упростите выражение $\sqrt{14+6\sqrt{5}} \cdot (\sqrt{5}-3)$.

1) -4 2) 4 3) $(\sqrt{5}-3)^2$ 4) -2

5. Сократите дробь $\frac{x^4-4}{(x^2+2)\left(x^2-(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}\right)}$, $x \neq \sqrt{2}$.

1) $\frac{x-\sqrt{2}}{x-1}$ 2) $\frac{x+\sqrt{2}}{x+1}$ 3) $\frac{x-\sqrt{2}}{x+1}$ 4) $\frac{x+\sqrt{2}}{x-1}$

6. Вычислите, исключив иррациональность из знаменателя, $\frac{(2+\sqrt{3})(3\sqrt{3}-5)}{\sqrt{3}-1}$.

Ответ: ________________.

7. Найдите значение выражения $a\sqrt{5}+b\sqrt{2}-\frac{4}{ab}+\sqrt{10}$ при $a=\sqrt{5}-1$, $b=\sqrt{2}+1$.

1) 8 2) $8+\sqrt{10}$
3) $8-2\sqrt{5}+2\sqrt{2}$ 4) $6-2\sqrt{5}+2\sqrt{2}+2\sqrt{10}$

8. Упростите выражение $-\frac{(4x^2-1)}{2x+1} \cdot \sqrt{\frac{4x^2+4x+1}{4x^2-4x+1}}$ при $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

Ответ: ________________.

Вариант № 6

1. Вычислите $\sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{320}{25}}$.

1) 4 2) $8\sqrt{2}$ 3) $12\sqrt{5}$ 4) 8

2. Вынесите множитель из-под знака корня $\sqrt{63}$.

1) $7\sqrt{3}$ 2) $3\sqrt{7}$ 3) $3\sqrt{60}$ 4) $7\sqrt{56}$

3. Выполните действия $5-3\sqrt{7}+\sqrt{63}$.

1) 11 2) 5 3) -5 4) $11\sqrt{7}$

4. Вычислите $\sqrt{\left(\sqrt{2}-3\right)^2}+\sqrt{2}+5$.

Ответ: ________________.

5. Упростите выражение $\frac{15\sqrt{8}}{\sqrt{18}}$.

1) $\frac{15}{\sqrt{3}}$ 2) $7{,}5\sqrt{2}$ 3) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ 4) 10

6. Расположите в порядке убывания числа $2\sqrt{10}$; 6,5; $\sqrt{41}$.

1) $2\sqrt{10}$; $\sqrt{41}$; 6,5 2) $\sqrt{41}$; $2\sqrt{10}$; 6,5
3) $2\sqrt{10}$; 6,5; $\sqrt{41}$ 4) 6,5; $\sqrt{41}$; $2\sqrt{10}$

7. Вынесите множитель из-под знака корня и упростите выражение $2\sqrt{18}+5\sqrt{50}-\frac{1}{4}\sqrt{32}-7\sqrt{2}$.

1) $18\sqrt{2}$ 2) $39\sqrt{2}$ 3) $23\sqrt{2}$ 4) $2\sqrt{2}$

8. Найдите наименьшее целое число, входящее в область допустимых значений выражения $\sqrt{80+9x}$.

Ответ: ________________.

§ 10. Линейные и квадратные уравнения

Основные сведения

Линейное уравнение. Уравнение вида $ax + b = 0$, где a и b — некоторые числа, x — переменная, называется линейным. Решением линейного уравнения такого вида является:

1) при $a \neq 0,\ b \in R\ \ x = -\frac{b}{a}$;

2) при $a = 0,\ b = 0\ \ x \in R$;

3) при $a = 0,\ b \neq 0\ \ x \in \varnothing$ (нет решений).

Квадратное уравнение.

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0,\ \ a \neq 0$ называется квадратным уравнением.

Дискриминант $D = b^2 - 4ac$.

Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два различных корня:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a},\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Если $D > 0$ и b — чётное целое число, то корни квадратного уравнения удобно вычислять по формуле

$$x_1 = \frac{-b/2 - \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a},\ x_2 = \frac{-b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a}.$$

Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет единственный корень $x = -\frac{b}{2a}$. Если $D < 0$, то действительных корней нет.

Уравнение вида $x^2 + px + q = 0$ называется **приведённым квадратным уравнением**. Дискриминант $D = p^2 - 4q$. При $D > 0$ корни этого уравнения можно найти по формулам $x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, $x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. При $D = 0$ $x = -\frac{p}{2}$.

Неполные квадратные уравнения.

1) $ax^2 + bx = 0, b \neq 0;\ \ x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}$.

2) $ax^2 + c = 0$, $ac < 0$; $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$.

3) $ax^2 = 0$; $x = 0$.

Связь между коэффициентами и корнями квадратного уравнения.

Если $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$.

Если $a + c = b$ (или, что то же самое, $a - b + c = 0$), то $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Формулы Виета.

Если x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \; x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Для уравнения вида $x^2 + px + q = 0$

$x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$ (если эти корни существуют).

Разложение квадратного трёхчлена на множители.

Если $D > 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ (x_1, x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$).

Если $D = 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ (x_1 — корень уравнения $ax^2 + bx + c = 0$).

Демонстрационный вариант

1. Найдите корни уравнения $5x^2 - 16x + 3 = 0$.

1) $\frac{1}{5}; 3$ 2) $-\frac{1}{5}; -3$ 3) $-\frac{1}{5}; 3$ 4) $\frac{1}{5}; -3$

Решение. Так как коэффициент при x — чётный, то корни уравнения:

$$x_1 = \frac{-(-8) - \sqrt{8^2 - 5 \cdot 3}}{5} = \frac{8 - 7}{5} = \frac{1}{5};$$

$$x_2 = \frac{-(-8) + \sqrt{8^2 - 5 \cdot 3}}{5} = \frac{8 + 7}{5} = 3.$$

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

2. Составьте приведённое квадратное уравнение, корни которого $x_1 = -7$; $x_2 = -1$.

1) $x^2 + 8x + 7 = 0$ 2) $x^2 - 8x + 7 = 0$
3) $x^2 - 8x - 7 = 0$ 4) $x^2 + 8x - 7 = 0$

Решение. Так как приведённое квадратное уравнение имеет вид $x^2 + px + q = 0$ и x_1 и x_2 его корни, то по формулам Виета $p = -(x_1 + x_2) = -(-7 + (-1)) = 8$; $q = x_1 \cdot x_2 = -7 \cdot (-1) = 7$. Значит, $x^2 + 8x + 7 = 0$ — искомое уравнение.

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

3. Решите уравнение $-x^2 + 2 = x + 2$.

Решение. $-x^2 + 2 = x + 2$; $x^2 + x = 0$; $x(x+1) = 0$. Корни уравнения $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.

Ответ: -1; 0.

4. Решите уравнение $\dfrac{5-x}{2} + 1 = \dfrac{3x-1}{4}$.

Решение. $\dfrac{5-x}{2} + 1 = \dfrac{3x-1}{4}$.

Умножив обе части уравнения на 4, получим $10 - 2x + 4 = 3x - 1 \Leftrightarrow 5x = 15 \Leftrightarrow x = 3$.

Ответ: 3.

5. Разложите квадратный трёхчлен $5x^2 + 2x - 3$ на множители.

1) $(x+1)\left(x + \frac{3}{5}\right)$ 2) $(x-1)\left(x - \frac{3}{5}\right)$
3) $(x+1)(5x-3)$ 4) $5(x-1)(x-3)$

Решение. Решая уравнение $5x^2 + 2x - 3 = 0$, находим $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3}{5}$. По формуле разложения квадратного трёхчлена (см. «Основные сведения» к параграфу) получаем $5x^2 + 2x - 3 = 5(x+1)\left(x - \frac{3}{5}\right) = (x+1)(5x-3)$. Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

6. Упростите выражение $\dfrac{x^2-3}{x^2-4x+3} - \dfrac{1}{x-1}$, $x \neq 1$.

1) $\dfrac{1}{x-3}$ 2) $\dfrac{1}{(x-1)(2x-3)}$
3) $\dfrac{x}{x-3}$ 4) другой ответ

Решение. Учитывая, что $x \neq 1$, получаем $\dfrac{x^2-3}{x^2-4x+3} - \dfrac{1}{x-1} =$

$$= \frac{x^2-3}{(x-1)(x-3)} - \frac{1}{x-1} = \frac{x^2-3-(x-3)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x^2-x}{(x-1)(x-3)} =$$

$$= \frac{x(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x}{x-3}.$$

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

7. При каких значениях x сумма дробей $\dfrac{2x-2}{x+3}$ и $\dfrac{x+3}{x-3}$ равна 5?

1) -6; 5 2) -5; 6 3) -3; 1 4) -6; -5

Решение. Задача сводится к решению уравнения

$\dfrac{2x-2}{x+3} + \dfrac{x+3}{x-3} = 5$ при условии $x \neq \pm 3$.

Умножим обе части уравнения на $(x+3)(x-3)$. Учитывая, что $x \neq -3$ и $x \neq 3$, получим $(2x-2)(x-3)+(x+3)^2 = 5(x^2-9) \Leftrightarrow x^2+x-30=0$. Корни уравнения $x_1=-6,\ x_2=5$.

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

8. Соотнесите каждое квадратное уравнение

А) $x^2-9=0$; Б) $2x-x^2=0$; В) $x^2-3x-4=0$

и его корни.

1) 0; 2 2) -3; 3 3) -1; 4 4) -4; 1

Решение. Из уравнения А получаем $x^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=3. \end{array}\right.$

Решение соответствует ответу 2).

Из уравнения Б следует $x(2-x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=2. \end{array}\right.$

Решение соответствует ответу 1).

Из уравнения В следует $(x+1)(x-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=4. \end{array}\right.$

Решение соответствует ответу 3).

Ответ:

А	Б	В
2	1	3

Вариант № 1

1. Найдите корни уравнения $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

1) $2; -\frac{1}{3}$ 2) $-2; \frac{1}{3}$ 3) $\frac{4}{3}; 1$ 4) $-\frac{4}{3}; -1$

2. Решите уравнение $-8x + 1 = 3(x - 7)$.

Ответ: ________________.

3. Решите уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Ответ: ________________.

4. При каком значении c значения двучленов $23c^2 + 6c$ и $13c^2 + 16c$ равны?

Ответ: ________________.

5. Какое выражение надо подставить вместо многоточия, чтобы равенство $x^2 + 19x - 42 = (x - 2)(\ \dots\ )$ было верным?

1) $x - 21$ 2) $x + 21$ 3) $x + 17$ 4) $x - 17$

6. Найдите сумму корней уравнения $0{,}7x + 14x^2 = 0$.

Ответ: ________________.

7. При каком значении параметра b уравнение $(b + 5)x^2 + (2b + 10)x + 4 = 0$ имеет только один корень?

Ответ: ________________.

8. Не решая уравнение, определите, сколько оно имеет корней. Соотнесите уравнения с ответами.

А) $2x^2 + 3x + 5 = 0$ Б) $x^2 - 7x + 8 = 0$ В) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

1) нет корней 2) два корня 3) один корень

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 2

1. Найдите корни уравнения $0{,}7(2x - 5) = 2{,}2 - 2(0{,}3x + 7{,}25)$.

1) 6,4 2) −11 3) −4,4 4) нет корней

2. Решите уравнение $3x^2 + 9x + 6 = 0$.

Ответ: ________________.

3. Решите уравнение $(2x - 1) \cdot (2x + 1) - (2x + 3)^2 = 38$.

Ответ: ________________.

4. Решите уравнение $\frac{2}{x - 5} = \frac{3}{3 - 2x}$.

Ответ: ________________.

5. Разложите квадратный трёхчлен $1 - 2x - 3x^2$ на множители.

1) $(x+1)(1-3x)$ 2) $(x-1)(3x+1)$
3) $3(x+1)(1-x)$ 4) $3(x-1)(x+1)$

6. Найдите сумму корней уравнения $18x^2 - 2 = 0$.

Ответ: ________________.

7. Найдите значение параметра a, при котором один корень уравнения $2x^2 - 6x + 1 - a = 0$ на 10 больше другого.

Ответ: ________________.

8. Соотнесите квадратные уравнения и их корни.

А) $x^2 + 3x - 4 = 0$ Б) $x^2 - 5x = 0$ В) $x^2 - 10x + 25 = 0$

1) $x_1 = 0, x_2 = 5$ 2) $x_1 = -4, x_2 = 1$ 3) $x_{1,2} = 5$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 3

1. Найдите корни уравнения $-5x(x-2) + 5(x+1)^2 = -1$.

Ответ: ________________.

2. Укажите приведённое квадратное уравнение, корни которого $x_1 = -6,\ x_2 = 4$.

1) $x^2 - 10x + 24 = 0$ 2) $x^2 - 2x - 24 = 0$
3) $x^2 + 2x - 24 = 0$ 4) $x^2 - 2x + 24 = 0$

3. Решите уравнение $(4x+1) \cdot (2x-4) - 8x^2 = 3 \cdot (6-x)$.

Ответ: ________________.

4. Решите уравнение $\dfrac{3x-1}{6} - \dfrac{x}{3} = \dfrac{5+x}{9}$.

Ответ: ________________.

5. Разложите квадратный трёхчлен $2x^2 - 5x - 12$ на множители.

1) $(2x-3)(x+4)$ 2) $2(x+3)(x-4)$
3) $(2x-3)(x-4)$ 4) $(2x+3)(x-4)$

6. Решите уравнение $x^2 + 10x + 24 = 0$.

Ответ: ________________.

7. При каких значениях b сумма дробей $\dfrac{2b^2+1}{3}$ и $\dfrac{b+4}{6}$ равна 4?

Ответ: ________________.

8. Соотнесите квадратные уравнения и их корни.

А) $x^2 - 1 = 0$ Б) $x^2 - x = 0$ В) $x^2 - x - 2 = 0$

1) $0; 1$ 2) $-1; 1$ 3) $-1; 2$ 4) $-2; 1$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 4

1. Найдите корни уравнения $3(x-1) - 2(3x+4) = 1$.

1) -4 2) -3 3) 3 4) 4

2. Найдите корни уравнения $5x^2 - 15x - 50 = 0$.

Ответ: ________________.

3. Найдите сумму корней уравнения $4x^2 - 12x + 5 = 0$.

Ответ: ________________.

4. Составьте квадратное уравнение, корни которого $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 3$.

1) $2x^2 + 7x - 3 = 0$ 2) $x^2 - 7x + 4 = 0$

3) $4x^2 + 6x + 3 = 0$ 4) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

5. Разложите квадратный трёхчлен $3x^2 + 13x + 4$ на множители.

Ответ: ________________.

6. Найдите корни уравнения $2x^2 + x = 0$.

Ответ: ________________.

7. При каких значениях a сумма дробей $\frac{5a^2 - 4}{4}$ и $\frac{a+3}{5}$ равна 5?

Ответ: ________________.

8. Соотнесите квадратные уравнения и их корни.

А) $x^2 - 9 = 0$ Б) $x^2 + 2x = 0$ В) $x^2 + 4 = 0$

1) $0; -2$ 2) $-2; 2$ 3) $-3; 3$ 4) нет корней

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 5

1. Найдите корни уравнения $(2x+3)^2 - (4x+1)(x+3) = 5$.

1) $\frac{4}{9}$ 2) 1 3) -1 4) корней нет

2. Составьте приведённое квадратное уравнение, корнями которого являются числа $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

1) $x^2 - x + 1 = 0$ 2) $x^2 + \frac{13}{6}x - 1 = 0$

3) $x^2 - \frac{13}{6}x - 1 = 0$ 4) $x^2 - \frac{13}{6}x + 1 = 0$

3. Найдите сумму корней уравнения $8x^2 + 2x - 3 = 0$.

Ответ: ________________.

4. Решите уравнение $4x^2 - 13x - 12 = 0$.

Ответ: ________________.

5. Представьте квадратный трёхчлен $10x^2 + 9x - 9$ в виде произведения линейных множителей.

Ответ: ________________.

6. Найдите корни уравнения $2x^2 - 5x = 0$.

Ответ: ________________.

7. При каких значениях параметра p уравнение $px^2 - 3x + p = 0$ имеет единственный корень?

Ответ: ________________.

8. Соотнесите квадратные уравнения и их корни.

А) $4x^2 + 4x - 15 = 0$ Б) $2x^2 + 7 = 0$ В) $4x^2 - 9 = 0$

1) $-2{,}5; 1{,}5$ 2) $-1{,}5; 1{,}5$ 3) $1{,}5; -2{,}5$ 4) корней нет

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 6

1. Решите уравнение $\frac{2x-5}{6} = \frac{3-5x}{4}$.

Ответ: ________________.

2. Решите уравнение $x^2 - x - 6 = 0$.

Ответ: ________________.

3. Решите уравнение $2(x-3) - 4x^2 = x - (2x+1)^2$.

Ответ: ________________.

4. При каком значении m значения двучленов $18m^2 + 32m$ и $6m + 38m^2$ равны?

Ответ: ________________.

5. Найдите корни уравнения $16x^2 - 4 = 0$.

Ответ: ________________.

6. Какое выражение нужно подставить вместо многоточия, чтобы равенство $(x^2 - 4)(\ \dots\ ) = 4x^4 - 14x^2 - 8$ было верным?

1) $4x^2 + 2$ 2) $4x^2 - 2$ 3) $x^2 + 2$ 4) $x^2 - 2$

7. При каких значениях параметра k уравнение $kx^2 - 5x + \frac{1}{4}k = 0$ имеет единственный корень?

Ответ: ________________.

8. Соотнесите квадратные уравнения и их корни.

А) $x^2 - 14x + 49 = 0$ Б) $x^2 - 7 = 0$ В) $x^2 - 7x = 0$

1) $x_{1,2} = 7$ 2) $x_1 = -\sqrt{7}, x_2 = \sqrt{7}$ 3) $x_1 = 0, x_2 = 7$

Ответ:

А	Б	В

§ 11. Системы двух уравнений с двумя неизвестными

Основные сведения

Системой уравнений называется некоторое количество уравнений, которые должны выполняться одновременно. **Решением системы** уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая каждое уравнение системы в верное равенство. **Решить систему** уравнений — значит найти все её решения или установить, что их нет.

Некоторые способы решений системы уравнений.

Способ подстановки. Из какого-либо уравнения следует выразить одну переменную через другую. Затем нужно подставить полученное для переменной выражение в другое уравнение и решить его. Далее необходимо сделать подстановку найденного значения переменной и вычислить значение второй переменной.

Способ сложения. Этот способ применяется в основном для решения систем линейных уравнений. Следует уравнять модули коэффициентов при какой-нибудь переменной, а затем, складывая или вычитая полученные уравнения, найти одно неизвестное. Подставив найденное значение в одно из исходных уравнений исходной системы, нужно найти второе неизвестное.

Графический способ. Решая систему уравнений графическим способом, следует выразить одну переменную через другую (например, y через x) в каждом уравнении и построить в одной системе координат график каждого уравнения. Затем нужно определить координаты точки пересечения, сделать проверку.

Демонстрационный вариант

1. Выразите из уравнения $2x - \frac{1}{2}y = 7$ переменную x через y.

1) $x = \frac{1}{4}y + 3{,}5$ 2) $x = y + 3{,}5$ 3) $y = 4x - 14$ 4) $x = \frac{1}{2}y + 7$

Решение. $2x - \frac{1}{2}y = 7 \Leftrightarrow 2x = \frac{1}{2}y + 7 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}y + 3{,}5.$

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

2. Гипербола, изображённая на рисунке 19, задаётся уравнением $y = \dfrac{3}{x}$.
Используя рисунок, установите соответствие между системами уравнений и утверждениями.

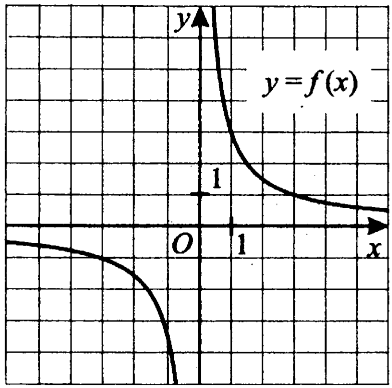


Рис. 19.

Системы уравнений

А) $\begin{cases} y = \dfrac{3}{x}, \\ y = x - 2 \end{cases}$

Б) $\begin{cases} y = \dfrac{3}{x}, \\ y = 2 - x \end{cases}$

В) $\begin{cases} y = \dfrac{3}{x}, \\ y = 2 \end{cases}$

Утверждения

1) система имеет одно решение

2) система имеет два решения

3) система не имеет решений

Решение. Рассмотрим каждую из представленных систем уравнений. В каждой из систем уравнений первое уравнение соответствует гиперболе, изображённой на рисунке, а второе — прямой.

В случае А угловой коэффициент прямой положителен (угол между положительным направлением оси абсцисс и данной прямой линией острый). Следовательно, прямая пересекает гиперболу в двух точках, и система имеет два решения, что соответствует утверждению 2).

В случае Б угловой коэффициент прямой отрицателен (угол между положительным направлением оси абсцисс и данной прямой линией тупой). Заметим, что прямая проходит через точку с координатами (1; 1), и следовательно, прямая не пересекает гиперболу. В этом случае система не имеет решений, что соответствует утверждению 3).

В случае В прямая проходит через точку с координатами $(0; 2)$ параллельно оси абсцисс. Следовательно, прямая пересекает гиперболу в одной точке, и система имеет одно решение, что соответствует утверждению 1).

Ответ:

А	Б	В
2	3	1

3. Из пар чисел $(3; 1)$, $(-9; 3)$, $(2; 1)$, $(1; 2)$ выберите ту, которая является решением системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + 11y = 15, \\ 10x - 11y = 9. \end{cases}$$

1) $(3; 1)$ 2) $(-9; 3)$ 3) $(2; 1)$ 4) $(1; 2)$

Решение. Подставим каждую из заданных пар чисел в систему уравнений и проверим, обращается ли каждое уравнение системы в верное равенство.

Подставляя пару чисел $(3; 1)$, получим $\begin{cases} 2 \cdot 3 + 11 \cdot 1 \neq 15, \\ 10 \cdot 3 - 11 \cdot 1 \neq 9. \end{cases}$ Следовательно, эти числа не являются решением данной системы уравнений.

Подставляя пару чисел $(-9; 3)$, получим $\begin{cases} 2 \cdot (-9) + 11 \cdot 3 = 15, \\ 10 \cdot (-9) - 11 \cdot 3 \neq 9. \end{cases}$ Следовательно, эти числа не являются решением данной системы уравнений.

Подставляя пару чисел $(2; 1)$, получим $\begin{cases} 2 \cdot 2 + 11 \cdot 1 = 15, \\ 10 \cdot 2 - 11 \cdot 1 = 9. \end{cases}$ Следовательно, эти числа являются решением данной системы уравнений.

Подставляя пару чисел $(1; 2)$, получим $\begin{cases} 2 \cdot 1 + 11 \cdot 2 \neq 15, \\ 10 \cdot 1 - 11 \cdot 2 \neq 9. \end{cases}$ Следовательно, эти числа не являются решением данной системы уравнений.

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

4. Вычислите координаты точки пересечения прямых $2x + 3y = 11$ и $3x + 2y = 9$.

Решение. Задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 11, \\ 3x + 2y = 9. \end{cases}$$

Решим систему способом сложения (см. «Основные сведения» к параграфу).

Умножая первое уравнение системы на 2, второе — на -3 и складывая почленно уравнения системы, получим

$$\begin{cases} -5x = -5, \\ 3x + 2y = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 3. \end{cases}$$

Ответ: (1; 3).

5. Найдите решение системы уравнений $\begin{cases} x - 3y = -20, \\ 5y - 2x = 25. \end{cases}$

1) $(-15; 20)$ 2) $(25; 15)$ 3) $(5; 25)$ 4) $(-10; -25)$

Решение.

Решим систему способом подстановки (см. «Основные сведения» к параграфу). Из первого уравнения выразим x через y.

Получим $x = 3y - 20$. Подставим во второе уравнение системы вместо x найденное выражение $3y - 20$. Система примет вид

$$\begin{cases} x = 3y - 20, \\ 5y - 2 \cdot (3y - 20) = 25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 20, \\ 5y - 6y + 40 = 25; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 3y - 20, \\ y = 15; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25, \\ y = 15. \end{cases}$$

Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

6. Найдите $x_0 + 2y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{y}{4} - \dfrac{x}{5} = 6, \\ \dfrac{x}{15} + \dfrac{y}{12} = 0. \end{cases}$$

Решим систему способом сложения. Умножая первое уравнение системы на $\dfrac{1}{3}$ и складывая почленно уравнения системы, получим

$$\begin{cases} \dfrac{2y}{12} = 2, \\ \dfrac{x}{15} + \dfrac{y}{12} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12, \\ \dfrac{x}{15} = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12, \\ x = -15. \end{cases}$$

Следовательно, $x_0 = -15$, $y_0 = 12$; $x_0 + 2y_0 = -15 + 2 \cdot 12 = 9$.

Ответ: 9.

7. Найдите наименьшее значение выражения $(9x + 2y - 13)^2 + (3x - 4y + 5)^2$ и значения x и y, при которых оно достигается.

Решение. Значение заданного выражения не может быть отрицательным, так как выражение представляет собой сумму квадратов трёх-членов. Следовательно, наименьшее значение, которое может достигать исходное выражение, равно 0. Это возможно только для x и y, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} 9x + 2y - 13 = 0, \\ 3x - 4y + 5 = 0. \end{cases}$$

Решим систему способом сложения. Умножая первое уравнение системы на 2 и складывая почленно уравнения системы, получим

$$\begin{cases} 21x - 21 = 0, \\ 3x - 4y + 5 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

Ответ: 0; $x = 1$; $y = 2$.

8. Для каждой пары прямых (см. рис. 20) укажите соответствующую систему уравнений.

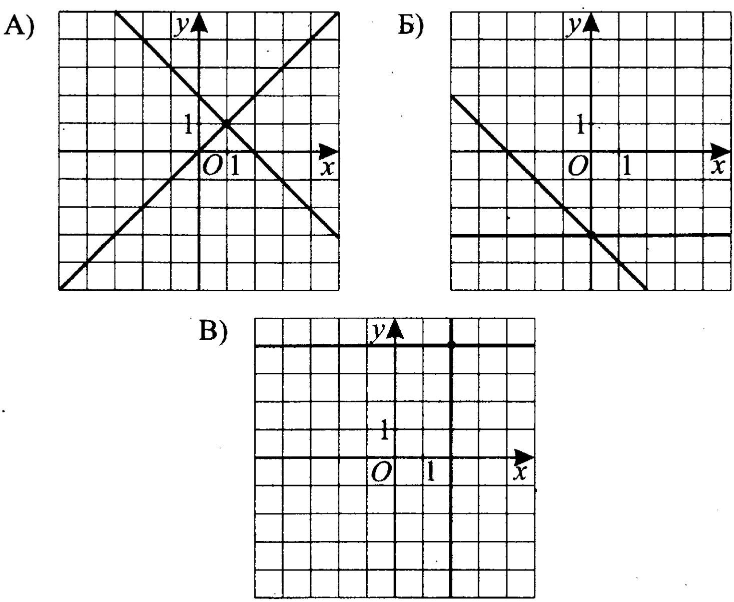


Рис. 20.

1) $\begin{cases} y = x, \\ y = -x + 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = -x - 3, \\ y = -3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = 4, \\ x = 2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = 4x, \\ y = 2x \end{cases}$

Решение. Одна из прямых, изображённая на рисунке 20 А, проходит через точки с координатами $(0; 0)$, $(1; 1)$ и, следовательно, задаётся уравнением $y = x$. Другая — через точки с координатами $(0; 2)$, $(2; 0)$ и задаётся уравнением $y = -x + 2$. Этим прямым соответствует система уравнений 1).

На рисунке 20 Б одна из прямых проходит через точки с координатами $(0; -3)$, $(-3; 0)$ и, следовательно, задаётся уравнением $y = -x - 3$. Другая параллельна оси абсцисс и проходит через точку с координатами $(0; -3)$, следовательно, задаётся уравнением $y = -3$. Этим прямым соответствует система уравнений 2).

На рисунке 20 В одна из прямых параллельна оси ординат и проходит через точку с координатами $(2; 0)$, следовательно, задаётся уравнением $x = 2$. Другая параллельна оси абсцисс и проходит через точку с координатами $(0; 4)$, следовательно, задаётся уравнением $y = 4$. Этим прямым соответствует система уравнений 3).

Ответ:

А	Б	В
1	2	3

Вариант № 1

1. Найдите решение системы уравнений $\begin{cases} 7x - 3y = 11, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$

1) $(1; 3)$ 2) $(0; 3)$ 3) $(1; 2)$ 4) $(2; 1)$

2. Окружность, изображённая на рисунке 21, задаётся уравнением $x^2 + y^2 = 9$. Используя рисунок, установите соответствие между системами уравнений и утверждениями.

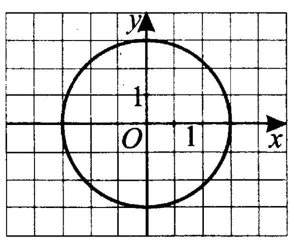


Рис. 21.

Системы уравнений

А) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = x. \end{cases}$

Б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = x - 9. \end{cases}$

В) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = -3. \end{cases}$

Утверждения

1) система имеет одно решение

2) система имеет два решения

3) система не имеет решений

Ответ:

А	Б	В

3. Используя графическую интерпретацию, выберите из данных уравнений второе уравнение системы $\begin{cases} y = x^2, \\ \dots \end{cases}$ так, чтобы она имела одно решение.

1) $y = x$ 2) $y = \dfrac{1}{x}$. 3) $y = -x$ 4) $y = 1$

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{6}{x} - \dfrac{8}{y} = -2, \\ \dfrac{9}{x} + \dfrac{10}{y} = 8. \end{cases}$

Ответ: ________________.

5. В координатной плоскости построены графики уравнений $2x^2 + y = 2$ и $2x + y = -2$ (см. рис. 22). Используя эти графики, найдите решение системы уравнений $\begin{cases} 2x^2 + y = 2, \\ 2x + y = -2. \end{cases}$

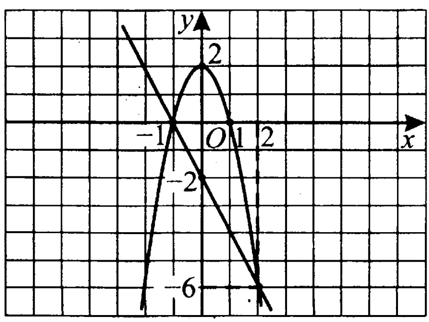


Рис. 22.

1) $(0; -1)$, $(2; -6)$ 2) $(-1; 0)$, $(-6; 2)$
3) $(-1; 0)$, $(2; -6)$ 4) $(0; 1)$, $(2; -6)$

6. Найдите координаты пересечения прямых $2x + 3y - 8 = 0$ и $3x + y - 19 = 0$.

1) $(2; 7)$ 2) $(7; 2)$ 3) $(7; -2)$ 4) $(-7; 2)$

7. Найдите наименьшее значение выражения $(x + 2y)^2 + (x + y - 1)^2$ и значения x и y, при которых оно достигается.

Ответ: ________________.

8. Для каждого графика (см. рис. 23) укажите соответствующую ему систему уравнений.

1) $\begin{cases} -2x - y = 2, \\ x = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = 3 + x, \\ y = x \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = x, \\ y = 3 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = -2, \\ y = -2 \end{cases}$

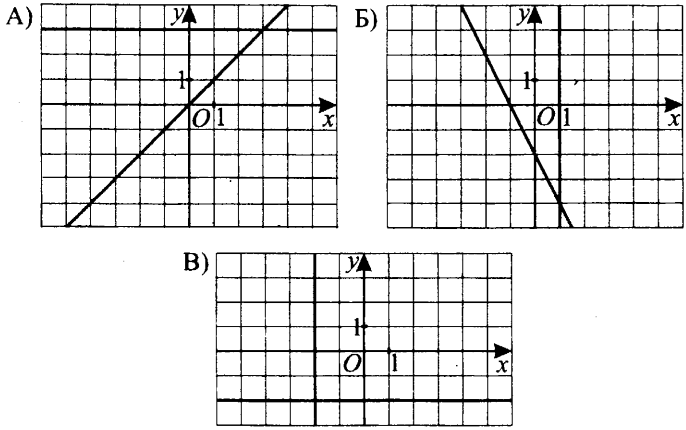


Рис. 23.

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 2

1. Найдите решение системы уравнений $\begin{cases} 4x + y = 2, \\ 6x - y = 8. \end{cases}$

1) $(-2; 1)$ 2) нет решений 3) $(-2; -1)$ 4) $(1; -2)$

2. На рисунке 24 изображён график функции $y = \sqrt{x-2}$. Используя этот рисунок, для каждой системы уравнений укажите соответствующее ей утверждение.

А) $\begin{cases} y = \sqrt{x-2}, \\ y = x - 2. \end{cases}$

Б) $\begin{cases} y = \sqrt{x-2}, \\ y = -x - 1. \end{cases}$

В) $\begin{cases} y = \sqrt{x-2}, \\ y = -x + 2. \end{cases}$

1) система имеет одно решение

2) система имеет два решения

3) система не имеет решений

Ответ:

А	Б	В

3. Линейные функции заданы формулами:

А) $y = -10x + 3$, Б) $y = 15 - 10x$, В) $y = 5x$.

Графики каких функций пересекаются в точке $\left(\frac{1}{5}; 1\right)$?

1) А; Б 2) А; В 3) Б; В 4) нет таких функций

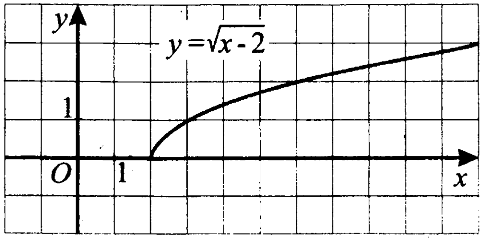


Рис. 24.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x+3y+\dfrac{4}{7x-y}=5, \\ 5x+3y-\dfrac{4}{7x-y}=3. \end{cases}$$

Ответ: ________________.

5. Пользуясь графиком (см. рис. 25), найдите решение системы

$$\begin{cases} y=2x-4, \\ y=-x-1. \end{cases}$$

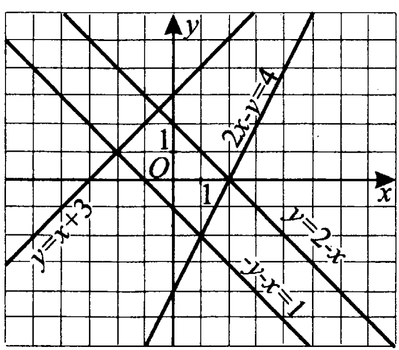


Рис. 25.

1) $(-2;1)$ 2) $(1;-2)$ 3) $(-0{,}5;2{,}5)$ 4) $(0;2)$

6. Найдите координаты точки пересечения прямых $4x+3y-5=0$ и $-2x+y+5=0$.

1) $\left(0;\dfrac{5}{3}\right)$ 2) $(1;-3)$ 3) $(3;-1)$ 4) $(2;-1)$

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} y=x-1, \\ x^2-2y=26. \end{cases}$

Ответ: ________________.

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ xy = 1. \end{cases}$

Ответ: ________________.

Вариант № 3

1. Выразите из уравнения $3x + 2y = 5$ переменную x через переменную y.

1) $x = \dfrac{5+2y}{2}$ 2) $x = \dfrac{5-2y}{3}$

3) $x = 3(5-2y)$ 4) $x = 3(5+2y)$

2. На рисунке 26 изображён график функции $y = \sqrt{2-x}$. Используя этот рисунок, для каждой системы уравнений укажите соответствующее ей утверждение.

А) $\begin{cases} y = \sqrt{2-x}, \\ y = 2 - x. \end{cases}$ 1) система имеет одно решение

Б) $\begin{cases} y = \sqrt{2-x}, \\ y = x - 2. \end{cases}$ 2) система имеет два решения

В) $\begin{cases} y = \sqrt{2-x}, \\ y = -1. \end{cases}$ 3) система не имеет решений

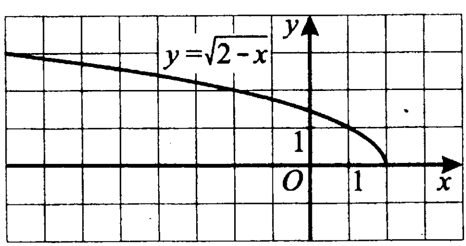


Рис. 26.

Ответ:

А	Б	В

3. Из пар чисел $(-1;0)$; $(0;-1)$; $(-1;-1)$; $(1;1)$ выберите ту, которая является решением системы уравнений $\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ y = -2x + 3. \end{cases}$

1) $(-1;0)$ 2) $(0;-1)$ 3) $(-1;-1)$ 4) $(1;1)$

4. На рисунке 27 изображены графики функций $y = \frac{4}{x}$, $y = x^2 - 2$.

Пользуясь рисунком, решите систему уравнений $\begin{cases} y = \frac{4}{x}, \\ y = x^2 - 2. \end{cases}$

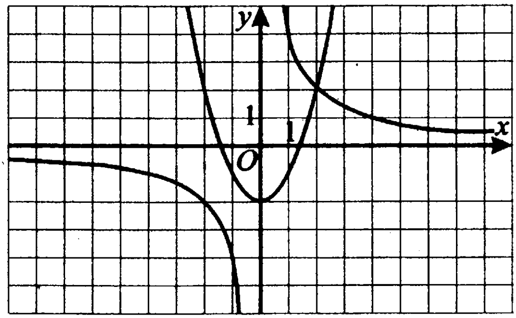


Рис. 27.

Ответ: ________________.

5. Найдите решение системы уравнений

$\begin{cases} 5x + y = 16, \\ 3x - 2y = 7. \end{cases}$

1) $(-1; -3)$ 2) $(1; -3)$ 3) $(3; 1)$ 4) $(-3; 1)$

6. Найдите $2x_0 + 3y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3} = \frac{13}{36}, \\ \frac{x+y}{3} + \frac{x-y}{2} = \frac{13}{36}. \end{cases}$$

Ответ: ________________.

7. Найдите координаты точек пересечения параболы

$y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4$ и прямой $2x - y - 5 = 0$.

Ответ: ________________.

8. Решите систему уравнений графически $\begin{cases} x^2 - 6x + y = 2, \\ y - \sqrt{x-3} = 9. \end{cases}$

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. Выразите из уравнения $5x - 2y = 3$ переменную x через y.

1) $\frac{5y+3}{2}$ 2) $\frac{5y-3}{2}$ 3) $\frac{3+2y}{5}$ 4) $\frac{3-2y}{5}$

2. Из пар чисел $(2; 1)$; $(-2; -1)$; $(2; -1)$; $(-2; 1)$ выберите ту, которая является решением системы уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = 4, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

1) $(2; 1)$ 2) $(-2; -1)$ 3) $(2; -1)$ 4) $(-2; 1)$

3. Укажите систему уравнений, которая имеет решение $(-1; 3)$ (см. рис. 28).

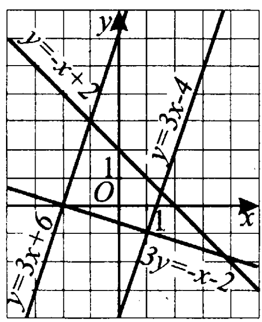


Рис. 28.

1) $\begin{cases} y = 3x + 6, \\ 3y = -x - 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = -x + 2, \\ y = 3x - 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3y = -x - 2, \\ y = 3x - 4 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = -x + 2, \\ y = 3x + 6 \end{cases}$

4. При каких значениях k прямая $y = kx - 2$ не имеет общих точек ни с параболой $y = x^2 + 3x - 1$, ни с параболой $y = x^2 - x + 2$?

Ответ: ________________.

5. Найдите $3x_0 - y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} y + 3x + 1 = 0, \\ y + x - 1 = 0. \end{cases}$$

1) -5 2) -3 3) 3 4) 5

6. Найдите решение системы уравнений $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 3x - 2y = 3. \end{cases}$

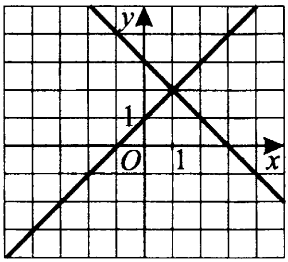
1) $(4; 4{,}5)$ 2) $(4; 5)$ 3) $(2; 1)$ 4) $(3; 3)$

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 + 7x - 5, \\ y = 7x + 4. \end{cases}$

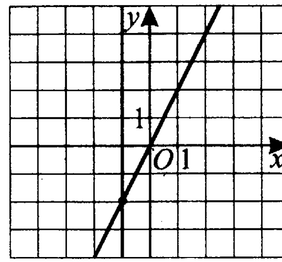
Ответ: ________________ .

8. Для каждой пары прямых (см. рис. 29) укажите соответствующую систему уравнений.

А)



Б)



В)

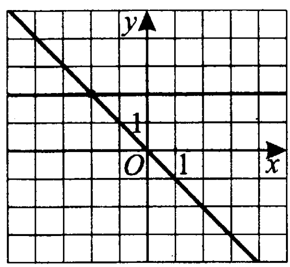


Рис. 29.

1) $\begin{cases} y = -x, \\ y = 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x + 1, \\ y = -x + 3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 1, \\ y = x + 1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = 2x, \\ x = -1 \end{cases}$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 5

1. Из уравнения $4y = 3x + 4$ выразите переменную x через y.

1) $x = \frac{4y - 4}{3}$ 2) $x = \frac{4y + 4}{3}$

3) $x = 3(4y - 4)$ 4) $x = 3(4y + 4)$

2. Какая из предложенных пар чисел является решением системы уравнений $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 3x + 2y = 1? \end{cases}$

1) $(-1; 1)$ 2) $(1; -1)$ 3) $(2; 3)$ 4) $(1,5; 0)$

3. Какая из предложенных систем уравнений не имеет решений?

1) $\begin{cases} 3x + y = 9, \\ x - 3y = -7 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x - 3y = -6, \\ y - x = -2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x = 2(2 - y), \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - x = 5, \\ x + 3y = 3 \end{cases}$

4. При каких значениях k парабола $y = 2x^2 + 2kx + 6$ и прямая $y = -k - 6$ не имеют общих точек?

Ответ: ________________.

5. Найдите решение системы уравнений $\begin{cases} 4x + y = 4, \\ 5y + 2x = -7. \end{cases}$

1) $(1{,}5; 2)$ 2) $(-1{,}5; 2)$ 3) $(1{,}5; -2)$ 4) $(-1{,}5; -2)$

6. Найдите $x_0 - 3y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений

$\begin{cases} 5(2x - y) - (5y - 3x) = -1, \\ 3(5y - 3x) - 2(2x - y) = 10{,}8. \end{cases}$

Ответ: ________________.

7. Найдите координаты точек пересечения прямой $y - x - 3 = 0$ с окружностью $x^2 + y^2 = 9$.

Ответ: ________________.

8. Для каждого графика (см. рис. 30) укажите систему, решением которой являются координаты точки пересечения прямых, изображённых на этом графике.

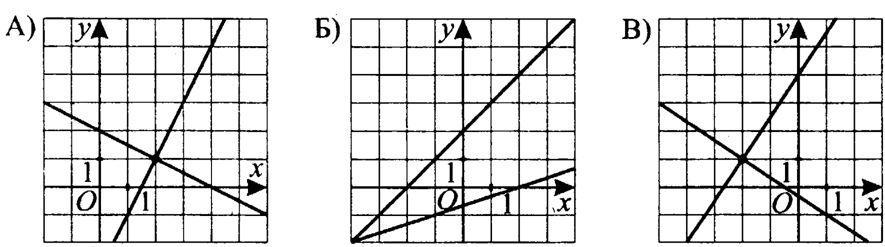


Рис. 30.

1) $\begin{cases} y - x = 2, \\ 3y = x - 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2y + x = 4, \\ y - 2x + 3 = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2y - 3x = 4, \\ 3y + 2x = 2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2y - 3x = 8, \\ 3y + 2x + 1 = 0 \end{cases}$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 6

1. Найдите решение системы уравнений $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 5y - x = 3. \end{cases}$

1) $(1; 1)$ 2) $(2; 1)$ 3) $(1; 2)$ 4) $(-1; -2)$

2. Используя график (см. рис. 31), найдите решение системы уравнений $\begin{cases} y + x + 2 = 0, \\ x - y = 0. \end{cases}$

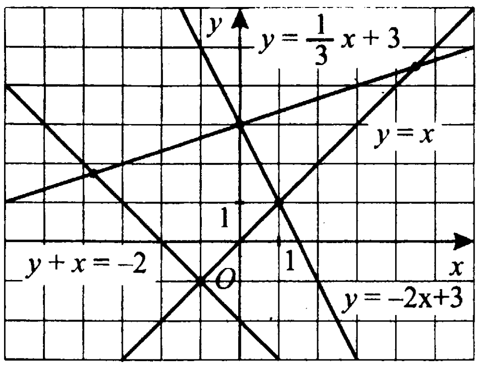


Рис. 31.

1) $(1; 1)$ 2) $(-1; -1)$ 3) $(0; 3)$ 4) $(-4; 2)$

3. Используя графическую интерпретацию, выберите из данных уравнений второе уравнение системы $\begin{cases} y = -x, \\ \ldots \end{cases}$ так, чтобы она не имела решений.

1) $y = \frac{1}{x}$ 2) $y = -\frac{1}{x}$ 3) $y = x$ 4) $y = x^2$

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 10, \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{y} = 9. \end{cases}$

Ответ: ________________.

5. На рисунке 32 изображены графики функций $y = 2 - |x|$, $y = |x| - 3$.

Используя рисунок, найдите решение системы уравнений $\begin{cases} |x| = 2 - y, \\ |x| - y = 3. \end{cases}$

1) $(-2; 2)$, $(-3; 3)$ 2) $(-2{,}5; -0{,}5)$, $(2{,}5; -0{,}5)$
3) $(2; 0)$, $(3; 0)$ 4) $(-2{,}5; 0{,}5)$, $(2{,}5; 0{,}5)$

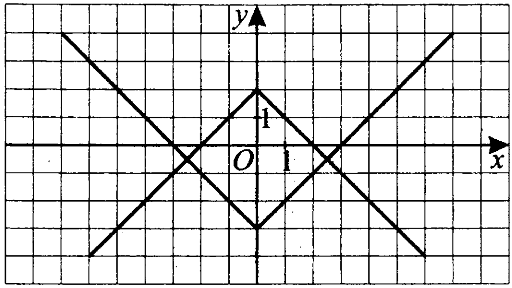


Рис. 32.

6. Найдите решение системы уравнений $\begin{cases} 2xy + y^2 = 15, \\ |x - y| = 6. \end{cases}$

1) $(-7; -1)$, $(-1; 5)$, $(1; -5)$, $(7; 1)$
2) $(7; -1)$, $(5; -1)$, $(-1; -5)$, $(-7; 1)$
3) $(-7; 5)$, $(-5; 7)$, $(7; -5)$, $(5; -7)$
4) $(-7; 1)$, $(1; 5)$, $(7; 5)$, $(5; 7)$

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 + 11x - 10, \\ y = 11x + 15. \end{cases}$

Ответ: ____________________.

8. Найдите все значения x и y, при которых каждое из выражений $\dfrac{20x + 14}{4x + y + 3}$, $\dfrac{x^2 + 8}{2y + 13 - 6x}$ не определено.

Ответ: ____________________.

§ 12. Неравенства с одной переменной и системы неравенств

Основные сведения

Решением неравенства с одной переменной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.

Неравенства, множества решений которых совпадают, называются **равносильными**.

Областью определения неравенства с одной переменной называется множество значений переменной, при которых обе части неравенства имеют смысл.

Из данного неравенства получается равносильное ему неравенство, если

1) из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком;

2) обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число;

3) обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив знак неравенства на противоположный;

4) в какой-либо части неравенства или в обеих его частях выполнить тождественное преобразование, не меняющее области определения неравенства.

Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы. Множеством решений системы является пересечение множеств решений неравенств, входящих в эту систему.

Демонстрационный вариант

1. Решите неравенство $3 - x \geqslant 3x + 5$.

1) $(-\infty; -0{,}5]$ 2) $[-0{,}5; +\infty)$ 3) $(-\infty; -2]$ 4) $[-2; +\infty)$

Решение. $3-x \geqslant 3x+5 \Leftrightarrow 3x+x \leqslant 3-5 \Leftrightarrow 4x \leqslant -2 \Leftrightarrow x \leqslant -0{,}5$. Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

2. На координатной прямой отмечено число a (см. рис. 33). Расположите в порядке возрастания числа a; $\frac{1}{a}$; a^2.

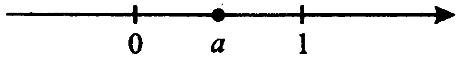


Рис. 33.

1) $\frac{1}{a}$; a; a^2 2) a^2; a; $\frac{1}{a}$ 3) $\frac{1}{a}$; a^2; a 4) a; $\frac{1}{a}$; a^2

Решение. Согласно рисунку $0 < a < 1$, отсюда $a^2 < a$ и $\frac{1}{a} > 1$. Значит, $a^2 < a < \frac{1}{a}$. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

3. Какое из приведённых ниже неравенств не следует из неравенства $x - y < z$?

1) $x - z - y < 0$ 2) $y > x - z$ 3) $y < z - x$ 4) $z + y > x$

Решение. Преобразуем каждое из перечисленных неравенств, перенося неизвестные x и y в левую часть неравенства, а z — в правую.

Неравенство 1: $x - z - y < 0 \Leftrightarrow x - y < z$.

Неравенство 2: $y > x - z \Leftrightarrow x - y < z$.

Неравенство 3: $y < z - x \Leftrightarrow x + y < z$. Не следует из исходного неравенства.

Неравенство 4: $z + y > x \Leftrightarrow x - y < z$.

Ответ: 3.

4. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3x + 6 \geqslant 0, \\ x - 5 < 0. \end{cases}$

1) $[-2; 5]$ 2) $[5; +\infty)$ 3) $[-2; 5)$ 4) $(5; +\infty)$

Решение.

$$\begin{cases} 3x + 6 \geqslant 0, \\ x - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geqslant -6, \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -2, \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2; 5).$$

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

5. Решите неравенство $x^2 - 36 \leqslant 0$. В ответе укажите количество целочисленных решений.

1) 11 2) 13 3) 12 4) 15

Решение. $x^2 - 36 \leqslant 0 \Leftrightarrow (x - 6)(x + 6) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-6; 6]$. В этот промежуток входит 13 целочисленных значений x. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

6. Укажите наименьшее целое число, принадлежащее множеству решений неравенства $\dfrac{x-3}{x+5} < 0$.

1) 3 2) -5 3) -4 4) 2

Решение. Решим неравенство методом интервалов (см. рис. 34).
Нули числителя: $x - 3 = 0$, $x = 3$.
Нули знаменателя: $x + 5 = 0$, $x = -5$.

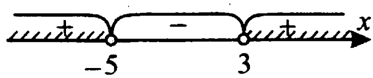


Рис. 34.

Следовательно, $x \in (-5; 3)$. Наименьшим целым числом, принадлежащим множеству решений заданного неравенства, является -4. Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

7. Укажите промежуток, которому принадлежит множество решений неравенства $-2 \leqslant \dfrac{3x-5}{4} \leqslant 6$.

1) $(-2; 9)$ 2) $(-1; 9]$ 3) $(-1; 10)$ 4) $[-1; 10]$

Решение.

$$-2 \leqslant \frac{3x-5}{4} \leqslant 6 \Leftrightarrow -8 \leqslant 3x - 5 \leqslant 24 \Leftrightarrow -8 + 5 \leqslant 3x \leqslant 24 + 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 \leqslant 3x \leqslant 29 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant \frac{29}{3}.$$

Следовательно, $x \in \left[-1; \dfrac{29}{3}\right]$. Так как $9 < \dfrac{29}{3} < 10$, то из указанных промежутков множество решений $\left[-1; \dfrac{29}{3}\right]$ принадлежит $[-1; 10]$.

Ответ: 4.

8. Для каждой системы неравенств укажите множество её решений.

А) $\begin{cases} 2x + 7 > 4x - 8, \\ 10 + 4x > 0 \end{cases}$ Б) $\begin{cases} x^2 - 10x + 9 < 0, \\ 6x - 12 > 0 \end{cases}$ В) $\begin{cases} \dfrac{x}{4} + 2 > x, \\ \dfrac{2}{x} - 6 \geqslant 0 \end{cases}$

1) $(-\infty; 0) \cup \left[\dfrac{1}{3}; 4\right)$ 2) $(-2{,}5; 7{,}5)$ 3) $(2; 9)$ 4) $\left(0; \dfrac{1}{3}\right]$

Решение. Найдём решение каждой из систем неравенств.

$$\text{А)}\ \begin{cases} 2x+7>4x-8,\\ 10+4x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x<15,\\ 4x>-10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<7{,}5,\\ x>-2{,}5. \end{cases}$$

Этому решению соответствует ответ 2).

$$\text{Б)}\ \begin{cases} x^2-10x+9<0,\\ 6x-12>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-9)<0,\\ 6x>12; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x<9,\\ x>2; \end{cases}$$

$\Leftrightarrow\ 2<x<9$. Этому решению соответствует ответ 3).

$$\text{В)}\ \begin{cases} \dfrac{x}{4}+2>x,\\ \dfrac{2}{x}-6\geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+8>4x,\\ \dfrac{2-6x}{x}\geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x<8,\\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2-6x\geqslant 0,\\ x>0, \end{cases}\\ \begin{cases} 2-6x\leqslant 0,\\ x<0; \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<\dfrac{8}{3},\\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\leqslant\dfrac{1}{3},\\ x>0, \end{cases}\\ \begin{cases} x\geqslant\dfrac{1}{3},\\ x<0; \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\dfrac{8}{3},\\ x\leqslant\dfrac{1}{3},\\ x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leqslant\dfrac{1}{3},\\ x>0. \end{cases}$$

Этому решению соответствует ответ 4).

Замечание. Неравенство $\dfrac{2-6x}{x}\geqslant 0$ можно было решить методом интервалов.

Ответ:

А	Б	В
2	3	4

Вариант № 1

1. Решите неравенство $5-3x\leqslant 2x-20$.

Ответ: ________________.

2. На координатной прямой отмечено число a (см. рис. 35). Расположите в порядке возрастания числа $a+1$; $\dfrac{1}{a}$; a^2.

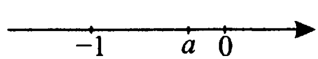


Рис. 35.

1) $a+1$; $\dfrac{1}{a}$; a^2 2) $\dfrac{1}{a}$; a^2; $a+1$ 3) $\dfrac{1}{a}$; $a+1$; a^2 4) a^2; $\dfrac{1}{a}$; $a+1$

3. Какое из приведённых ниже неравенств **не** следует из неравенства $a + b < d$?

1) $a < d - b$ 2) $d - b > a$ 3) $d - b - a > 0$ 4) $d - a + b > 0$

4. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2x + 7 \geqslant 15, \\ 10 - x > 0. \end{cases}$

Ответ: ________________.

5. Множество решений какой системы неравенств показано на рисунке 36?

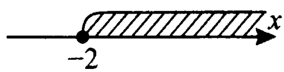


Рис. 36.

1) $\begin{cases} 3x + 5 > 1, \\ 5x + 24 \geqslant -2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1 - 7x \geqslant 2, \\ 10 - x \geqslant 5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6x + 6 \geqslant 4, \\ 2 - 11x \geqslant 16 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x + 1 \geqslant -7, \\ 3x - 2 \geqslant -20 \end{cases}$

6. На каком из рисунков (см. рис. 37) изображено множество решений системы неравенств $\begin{cases} x + 1 \leqslant -2, \\ 2x + 1 < -7? \end{cases}$

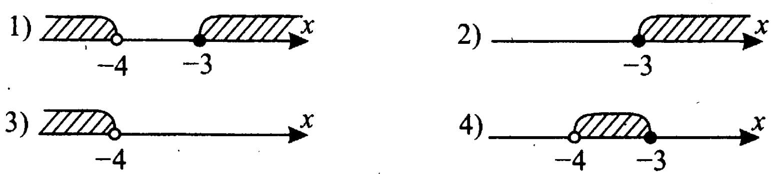


Рис. 37.

7. Укажите промежуток, которому принадлежит множество решений неравенства $2 \leqslant \dfrac{4x - 8}{7} \leqslant 5$.

1) $(6; 10)$ 2) $(5; 11)$ 3) $(6; 11]$ 4) $[6; 10]$

8. Для каждой системы неравенств укажите множество её решений.

А) $\begin{cases} 5(x + 1) \leqslant 7(x + 3) + 1, \\ \dfrac{2x - 1}{3} \leqslant \dfrac{x + 1}{2} \end{cases}$ Б) $\begin{cases} 7 - 3x \geqslant 0, \\ 4x - 20 < 0 \end{cases}$

В) $\begin{cases} \dfrac{x-5}{3} < \dfrac{3x-1}{2}, \\ \dfrac{x+3}{5} > \dfrac{x+2}{3} \end{cases}$

1) $\left(-\infty; \frac{7}{3}\right]$ 2) $[-8{,}5; 5]$ 3) $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ 4) $(-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 2

1. Решите неравенство $5x - 2 \geqslant 13$.

Ответ: ________________.

2. Известно, что число k принадлежит промежутку $(2; +\infty)$. На каком из рисунков (см. рис. 38) точки с координатами k, $2k$, k^2 расположены на координатной прямой в правильном порядке?

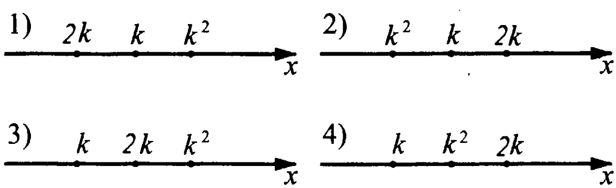


Рис. 38.

3. Какое из приведённых ниже неравенств является верным при всех значениях $q < -7$?

1) $q + 7 > 0$ 2) $7 - q < 0$
3) $7 - q > 10$ 4) $q + 7 < -7$

4. При каких значениях x значения выражения $3x - 2$ принадлежат промежутку $[-14; 4]$?

Ответ: ________________.

5. Решите неравенство $8x + 12 > 4 - 3(4 - x)$.

1) $x > -4$ 2) $x < -4$ 3) $x > -5{,}6$ 4) $x < -5{,}6$

6. Решите систему неравенств $\begin{cases} y < 3{,}2, \\ y < \dfrac{17}{21}, \\ y \leqslant -4. \end{cases}$

Ответ: ________________.

7. Укажите на рисунке 39 множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 5x - 2 > 0, \\ 12 - 3x > 0. \end{cases}$$

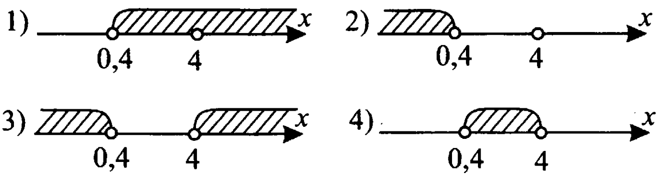


Рис. 39.

8. Какое из следующих чисел удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{cases} 7x + 13 > 0, \\ 12x - 7 \leqslant 0? \end{cases}$$

1) $-\frac{27}{12}$ 2) $-\frac{13}{6}$ 3) $\frac{13}{24}$ 4) $\frac{8}{13}$

Вариант № 3

1. Решите неравенство $0{,}9 - 0{,}1x \geqslant 0$.

Ответ: ________________.

2. Известно, что число m принадлежит промежутку $(0; 1)$. На каком из рисунков (см. рис. 40) точки с координатами m, $2m$, m^2 расположены на координатной прямой в правильном порядке?

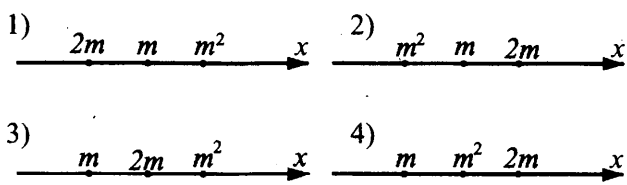


Рис. 40.

3. Известно, что $b > 0{,}5$. Какое из неравенств верно?

1) $-6b + 8 < 5$ 2) $-6b + 8 > 5$

3) $6b + 8 < 5$ 4) $-6b - 8 > 5$

4. При каких значениях x значения выражения $8x - 2$ принадлежат промежутку $[-10; 14]$?

Ответ: ________________.

5. Решите неравенство $7 - 2x < -23 - 5(x - 3)$.

1) $x > -5$ 2) $x < -5$ 3) $x > -15$ 4) $x < -15$

6. Решите систему неравенств $\begin{cases} x > 8, \\ x \geqslant \dfrac{15}{17}, \\ x \geqslant -25. \end{cases}$

Ответ: ________________.

7. Множество решений какой системы неравенств показано на рисунке 41?

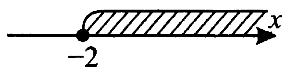


Рис. 41.

1) $\begin{cases} 3x + 7 > 1, \\ 5x + 16 \geqslant -4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1 - 4x \geqslant 9, \\ 11 - 2x \geqslant 5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6x + 16 \geqslant 4, \\ 2 - 7x \geqslant 16 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x + 13 \geqslant 3, \\ 9x - 2 \geqslant -20 \end{cases}$

8. Какое из следующих чисел удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases} 4 - 5x \geqslant 0, \\ x + 13 > 0? \end{cases}$

1) -25 2) -10 3) 1 4) 12

Вариант № 4

1. Решите неравенство $4 - 7x \geqslant 12 - 3x$.

1) $(-\infty; 2]$ 2) $[2; +\infty)$ 3) $[-2; +\infty)$ 4) $(-\infty; -2]$

2. На координатной прямой отмечено число a (см. рис. 42). Расположите в порядке убывания числа a^2; $a + 1$; $\dfrac{1}{a}$.

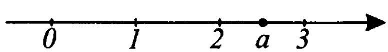


Рис. 42.

1) $a + 1$; a^2; $\dfrac{1}{a}$ 2) a^2; $a + 1$; $\dfrac{1}{a}$

3) $\dfrac{1}{a}$; $a + 1$; a^2 4) $\dfrac{1}{a}$; a^2; $a + 1$

3. Какое из приведённых ниже неравенств следует из неравенства $a + b > d$?

1) $a > b + d$ 2) $a + b + d > 0$
3) $d - b + a < 0$ 4) $a + b - d > 0$

4. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3x - 1 \geqslant 8, \\ 16 - 2x > x + 4. \end{cases}$

1) нет решений 2) $[-3; 3)$ 3) $[3; 4)$ 4) $(-3; 3]$

5. На каком из рисунков (см. рис. 43) изображено множество решений неравенства $\dfrac{2-x}{2} \leqslant \dfrac{x-2}{3} + 2$?

Ответ: ________________.

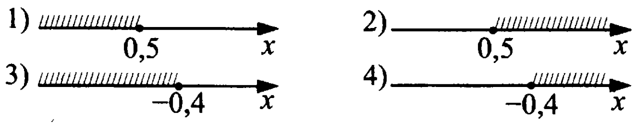


Рис. 43.

6. При каких значениях y значения выражения $7 - 2y$ принадлежат промежутку $[-2; 5]$?

Ответ: ________________.

7. Какое из следующих чисел удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases} 6 - 2x \geqslant 0, \\ x + 15 > 0? \end{cases}$

1) -25 2) 25 3) -5 4) 5

8. Решите неравенство $\dfrac{5-x}{x^2+2} \geqslant 0$.

Ответ: ________________.

Вариант № 5

1. Решите неравенство $2x + 8 \geqslant -5(x - 3)$.

Ответ: ________________.

2. На координатной прямой отмечено число a (см. рис. 44). Расположите в порядке возрастания числа $\dfrac{1}{a}$; $a^2 - a$; $1 - a$.

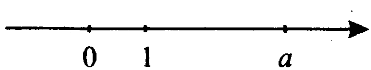


Рис. 44.

1) $1 - a; \dfrac{1}{a}; a^2 - a$ 2) $\dfrac{1}{a}; a^2 - a; 1 - a$

3) $a^2 - a; 1 - a; \dfrac{1}{a}$ 4) $a^2 - a; \dfrac{1}{a}; 1 - a$

3. Какое из неравенств не следует из неравенства $a + b - 1 \geqslant c$?

1) $c + 1 \leqslant a + b$ 2) $b - c \geqslant 1 - a$

3) $a - c - 1 \geqslant -b$ 4) $1 - b \geqslant a - c$

4. Решите систему неравенств $\begin{cases} 15x - 4 \geqslant 2x + 5, \\ 4 - x \leqslant 3. \end{cases}$

Ответ: ________________.

5. Используя рисунок 45, укажите, какое из следующих неравенств не является верным.

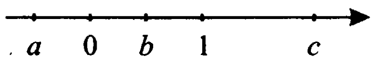


Рис. 45.

1) $a + b + c > 0$ 2) $c - a - b < 0$ 3) $2a + b < 0$ 4) $c - 1 > 0$

6. Укажите на рисунке 46 множество решений системы неравенств
$\begin{cases} 4x - 5 > 0, \\ 24 - 6x > 0. \end{cases}$

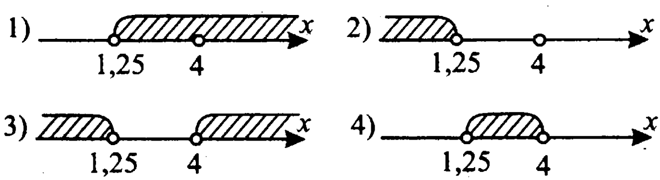


Рис. 46.

7. Найдите множество решений неравенства $-3 < \dfrac{x + 2}{4} \leqslant 1$.

Ответ: ________________.

8. Для каждой системы неравенств укажите тип промежутка, являющегося её решением.

А) $\begin{cases} 4x - 5 > 1, \\ 3x + 1 < 0 \end{cases}$ Б) $\begin{cases} 3 - x \geqslant 2, \\ 2x - 4 \leqslant 3 \end{cases}$ В) $\begin{cases} x > -1, \\ 3(3x - 8) + 5 < -4 \end{cases}$

1) интервал 2) отрезок 3) луч 4) решений нет

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 6

1. Известно, что $x > 1$. Сравните числа x и $\frac{1}{x}$.

Ответ: ________________.

2. Решите неравенство $3(x+3) < -2(x-5)$.

Ответ: ________________.

3. Известно, что $g < -3$. Какое из неравенств верно?

1) $0{,}5g - 0{,}6 < -2{,}1$ 2) $0{,}5g + 0{,}6 < -2{,}1$

3) $-0{,}5g - 0{,}6 < -2{,}1$ 4) $0{,}5g - 0{,}6 > -2{,}1$

4. Решите неравенство $3x + 1 \geqslant 2(x-1) + 6x$.

Ответ: ________________.

5. Найдите количество целочисленных решений неравенства $5x + 4 > 2x - 5$, удовлетворяющих условию $4x - 2 \leqslant 3$.

1) 5 2) 2 3) 3 4) 4

6. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3 - 4x \leqslant 19, \\ 1 - 2x > 0. \end{cases}$

Ответ: ________________.

7. Множество решений какой системы неравенств показано на рисунке 47?

Рис. 47.

1) $\begin{cases} 7x - 13 \leqslant 1, \\ 5 - 4x \leqslant 9 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 5 \leqslant 2, \\ 7 - 2x \leqslant 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x - 5 \geqslant 3, \\ 2x + 8 \geqslant 6 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x + 17 \leqslant 4, \\ 5x - 6 \leqslant 4 \end{cases}$

8. Решите неравенство $\dfrac{2x - 11}{x^2 + 9} \geqslant 0$.

Ответ: ________________.

§ 13. Решение квадратных неравенств. Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Системы неравенств

Основные сведения

Квадратным неравенством с одной переменной x называют неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$, где a, b, c — действительные числа, $a \neq 0$.

Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком (не меняя при этом знака неравенства).

Если обе части неравенства с переменной x умножить или разделить на одно и то же выражение $p(x)$, положительное **при всех значениях** x, и сохранить знак исходного неравенства, то получится неравенство, равносильное данному.

Если обе части неравенства с переменной x умножить или разделить на одно и то же выражение $p(x)$, отрицательное **при всех значениях** x, и изменить знак исходного неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.

Квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ с отрицательным дискриминантом при всех значениях x имеет знак старшего коэффициента a.

Модуль вещественного аргумента $|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

Основные свойства модуля.

$|a| \geqslant 0$

$|a| = |-a|$ $\qquad$ $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$

$|ab| = |a| \cdot |b|$ $\qquad$ $|a + b| \leqslant |a| + |b|$

$|a|^2 = a^2$ $\qquad$ $|a - b| \geqslant |a| - |b|$

Решением неравенства $|x| < b$ являются значения x, удовлетворяющие неравенству $-b < x < b$.

Решением неравенства $|x| > b$ являются значения x, удовлетворяющие совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} x < -b, \\ x > b. \end{array}\right.$

Некоторые **методы решения** уравнений и неравенств, содержащих модуль:

1) **Общий метод**. Разобьём числовую ось точками, в которых обращаются в ноль выражения, стоящие под знаком модуля. Решаем неравенства на каждом из полученных промежутков.

2) **Метод возведения в квадрат**. $|f(x)| = g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f^2(x) = g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$

3) **Метод замены**. $af^2(x)+b|f(x)|+c > 0 \Leftrightarrow a|f(x)|^2+b|f(x)|+c > 0$. Замена: $t = |f(x)|, t \geqslant 0, \Leftrightarrow at^2 + bt + c > 0$.

Демонстрационный вариант

1. При каких значениях x верно неравенство $x^2 + x - 6 < 0$?

Решение. $x^2 + x - 6 < 0$. Решим неравенство методом интервалов (см. рис. 48).

$$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 2. \end{array} \right.$$

$$(x + 3)(x - 2) < 0$$

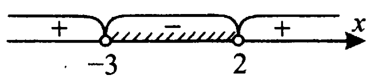


Рис. 48.

Следовательно, $x \in (-3; 2)$.

Ответ: $(-3; 2)$.

2. Решите неравенство $|x + 3| \geqslant 2$.

1) $(-\infty; -5] \cup [-1; +\infty)$ 2) $[-1; 5]$

3) $[-5; -1]$ 4) $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$

Решение. $|x + 3| \geqslant 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 3 \geqslant 2, \\ x + 3 \leqslant -2; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant -1, \\ x \leqslant -5 \end{array} \right.$

(см. «Основные сведения» к параграфу).

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

3. При каком наименьшем натуральном значении x значение квадратного трёхчлена $-4x^2 + x + 1$ меньше соответствующих значений двучлена $2 - 4x$?

Решение. Задача сводится к нахождению наименьшего натурального x, удовлетворяющего неравенству $-4x^2 + x + 1 < 2 - 4x \Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 1 > 0$. Решим неравенство методом интервалов.

$$4x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \dfrac{1}{4}. \end{array} \right.$$

Неравенство примет вид $4\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-1\right)>0$. Отметим на числовой оси значения $x=\frac{1}{4}$ и $x=1$ (см. рис. 49) и выберем соответствующие решения.

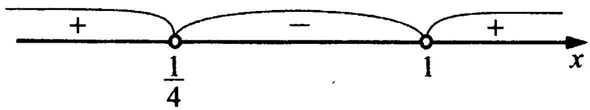


Рис. 49.

Согласно рисунку находим $x \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup (1; \infty)$. Следовательно, наименьшим натуральным x, удовлетворяющим условию задачи, является 2.

Ответ: 2.

4. Найдите количество целочисленных решений неравенства
$\frac{x^2-15x+50}{x^2+3x+7} \leqslant 0$.

Решение. Разложим числитель и знаменатель дроби (если это возможно) на линейные множители.

$x^2-15x+50=0$, $x_1=5$ и $x_2=10$ — корни уравнения.

$x^2+3x+7=0$, $D=9-4\cdot 7<0$, действительных корней нет. Учитывая, что старший коэффициент уравнения $a=1$, $a>0$, имеем $x^2+3x+7>0$ при любом значении x.

Исходное неравенство равносильно неравенству $(x-5)(x-10) \leqslant 0$.

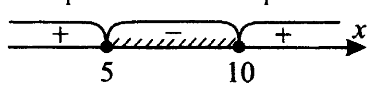


Рис. 50.

Получаем $5 \leqslant x \leqslant 10$. Промежуток $[5; 10]$ содержит 6 целых чисел, значит, неравенство имеет 6 целочисленных решений.

Ответ: 6.

5. Решите неравенство $|2x-4|<6$.

Решение. Данное неравенство равносильно двойному неравенству $-6<2x-4<6 \Leftrightarrow -6+4<2x<6+4 \Leftrightarrow -2<2x<10 \Leftrightarrow -1<x<5$.

Ответ: $(-1; 5)$.

6. Решите неравенство $\frac{x-7}{x+3} \geqslant 1$.

Решение. $\dfrac{x-7}{x+3} \geqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{x-7}{x+3} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-7-x-3}{x+3} \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{10}{x+3} \leqslant 0 \Leftrightarrow x < -3.$

Ответ: $(-\infty; -3)$.

7. На рисунке 51 изображены графики функций $y = 2 - |x|$ и $y = |x| - 3$.

Используя рисунок, решите систему неравенств $\begin{cases} 2 - |x| > 0, \\ |x| - 3 < 0. \end{cases}$

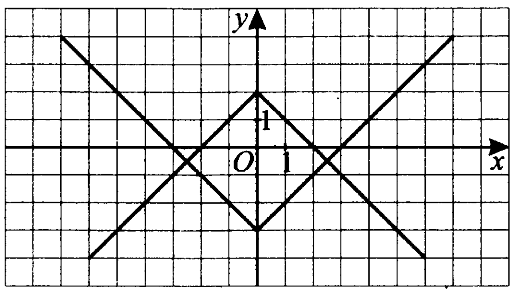


Рис. 51.

1) $(-2{,}5; 2{,}5)$ 2) $(-2; 2)$ 3) $(-3; -2) \cup (2; 3)$ 4) $(-3; 3)$

Решение. По рисунку находим множество решений каждого неравенства.

1) $2 - |x| > 0$, $x \in (-2; 2)$.

2) $|x| - 3 < 0$, $x \in (-3; 3)$.

Решением системы будут те значения переменной, которые удовлетворяют каждому неравенству.

Следовательно, $x \in (-2; 2)$. Из предложенных вариантов ответов верным является 2).

Ответ: 2.

8. Решите систему неравенств $\begin{cases} \left|\dfrac{x+3}{2x-3}\right| > 1, \\ \dfrac{x+3}{2} - \dfrac{x+4}{3} \geqslant 1. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} \left|\dfrac{x+3}{2x-3}\right| > 1, \\ \dfrac{x+3}{2} - \dfrac{x+4}{3} \geqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dfrac{x+3}{2x-3} < -1, \\ \dfrac{x+3}{2x-3} > 1, \end{array}\right. \\ 3(x+3) - 2(x+4) \geqslant 6; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dfrac{x+3+2x-3}{2x-3} < 0, \\ \dfrac{x+3-2x+3}{2x-3} > 0, \end{array} \right. \\ 3x+9-2x-8 \geqslant 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dfrac{3x}{2x-3} < 0, \\ \dfrac{6-x}{2x-3} > 0, \end{array} \right. \\ x \geqslant 5; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{x-1{,}5} < 0, \\ \dfrac{x-6}{x-1{,}5} < 0, \end{array} \right. \\ x \geqslant 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0 < x < 1{,}5, \\ 1{,}5 < x < 6, \end{array} \right. \\ x \geqslant 5; \end{cases} \Leftrightarrow 5 \leqslant x < 6.$$

Ответ: $[5; 6)$.

Вариант № 1

1. При каких значениях x верно неравенство $x^2 + 4x - 21 < 0$?
Ответ: ________________.

2. Решите неравенство $|2x - 3| > 1$.
Ответ: ________________.

3. Найдите наибольшее решение неравенства $\dfrac{x+10}{x-25} \leqslant 0$, являющееся целым нечётным числом.
Ответ: ________________.

4. Решите неравенство $\dfrac{2}{2x+3} \geqslant 1$.

1) $(-\infty; -3) \cup [-1; +\infty)$ 2) $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

3) $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right]$ 4) $(-3; -1]$

5. Решите неравенство $|x - 2| \leqslant 5$.
Ответ: ________________.

6. Решите неравенство $-x^2 + 8x - 7 \geqslant 0$.
Ответ: ________________.

7. На каком рисунке (см. рис. 52) показано множество решений системы неравенств $\begin{cases} x + 13 \leqslant 15, \\ \dfrac{1}{x} \leqslant 1? \end{cases}$

8. Решите неравенство $|x + 1| + |x - 1| \leqslant 2$.
Ответ: ________________.

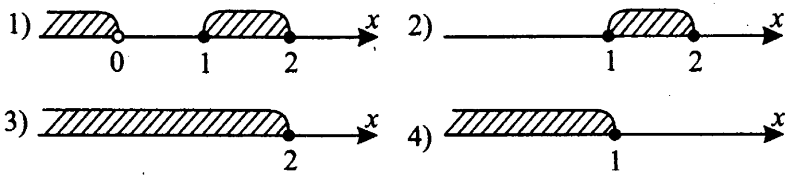


Рис. 52.

Вариант № 2

1. Решите неравенство $(x-7)(x+7) < -40$.

Ответ: ________________ .

2. На рисунке 53 изображён график функции $y = -x^2 + 2x + 6$. Используя рисунок, решите неравенство $x^2 - 2x < 3$.

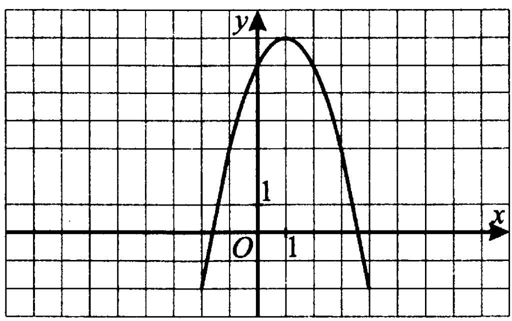


Рис. 53.

Ответ: ________________ .

3. Решите неравенство $-x^2 + 9x \geqslant 0$.

Ответ: ________________ .

4. Решите неравенство $|2x-3| < 5$.

1) $1 < x < 4$ 2) $x < 1, x > 4$

3) $-1 < x < 4$ 4) $x < -1, x > 4$

5. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3x + 5 \geqslant x - 1, \\ 2x + 1 > 4x + 3. \end{cases}$

Ответ: ________________ .

6. Какое из перечисленных ниже множеств является решением неравенства $\dfrac{1}{2-x} < 3$?

1) $\left(-\infty; \frac{5}{3}\right) \cup \left(2; +\infty\right)$ 2) $\left(\frac{5}{3}; 2\right)$

3) $\left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$ 4) $\left(\frac{5}{3}; 2\right) \cup \left(2; +\infty\right)$

7. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{6-x}{x+3} \geqslant 0, \\ \dfrac{1}{x} \leqslant -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Ответ: ________________.

8. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{y-1}{8} - \dfrac{6y+1}{4} < 1, \\ \left|\dfrac{y+5}{y-1}\right| > 1. \end{cases}$

Ответ: ________________.

Вариант № 3

1. Решите неравенство $(2-x)(x+3) \geqslant 0$.

Ответ: ________________.

2. На рисунке 54 изображён график функции $y = -x^2 - 4x$. Используя график, решите неравенство $x^2 + 4x < 0$.

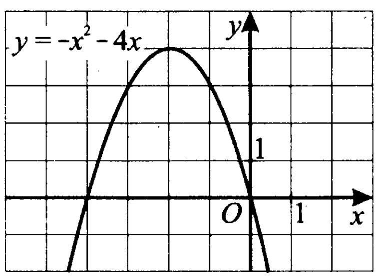


Рис. 54.

Ответ: ________________.

3. При каких натуральных значениях n значения квадратного трёхчлена $3n^2 - 10n + 2$ меньше соответствующих значений двучлена $2 - 4n$?

Ответ: ________________.

4. Найдите количество целочисленных решений неравенства
$\dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 7x + 10} < 0$.

Ответ: ________________.

5. При каких значениях x функция, заданная формулой $y = -x^2 + 36$, принимает отрицательные значения?

Ответ: ________________.

6. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2x - 5 < x + 1, \\ 2x - 5 \geqslant 1 - x. \end{cases}$

1) нет решений 2) $(-\infty; 6)$ 3) $[2; 6)$ 4) $[2; +\infty)$

7. Решите неравенство $\dfrac{2x^2-8}{3-|x+2|} \geqslant 0$.

1) решений нет 2) $(-\infty; -2) \cup [2; +\infty)$
3) $[-5; 1)$ 4) $(-5; -2] \cup (1; 2]$

8. Постройте график функции $y = \dfrac{5-2x}{3}$. При каких значениях функции выполняется неравенство $2 < x \leqslant 3\frac{2}{3}$?

Ответ: ________________ .

Вариант № 4

1. Решите неравенство $3x^2 - 7x + 2 > 0$.
Ответ: ________________ .

2. Решите неравенство $\dfrac{2x-1}{x+4} \geqslant 5$.

Ответ: ________________ .

3. Решите неравенство $\dfrac{x(2x+1)}{(x+1)(x-2)} \leqslant 0$.

1) $(-\infty; -1) \cup \left[-\frac{1}{2}; 0\right] \cup (2; +\infty)$ 2) $(-\infty; 0] \cup (2; +\infty)$

3) $[-2; -1) \cup [-\frac{1}{2}; 2)$ 4) $(-1; -\frac{1}{2}] \cup [0; 2)$

4. Из чисел -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1 выберите все те, при которых значения выражения $13x + 7$ не меньше значений выражения $9x - 5$.
Ответ: ________________ .

5. При каких значениях x функция, заданная формулой $y = x^2 - 5x + 6$, принимает неотрицательные значения?
Ответ: ________________ .

6. Решите неравенство $\dfrac{x-5}{x+7} < 1$.

Ответ: ________________ .

7. Решите систему неравенств $\begin{cases} 5x+1 \geqslant 3x-5, \\ x^2+3x < 4. \end{cases}$

1) решений нет 2) $[-3; 1)$ 3) $(-\infty; -4)$ 4) $(1; +\infty)$

8. Решите неравенство $|x-3| + |2x+1| \leqslant 14$.
Ответ: ________________ .

Вариант № 5

1. Решите неравенство $(1-x)(x+4)>0$.

Ответ: ______________ .

2. Найдите все натуральные числа, удовлетворяющие неравенству $\dfrac{20-5x}{x^2-9}\geqslant 0$.

Ответ: ______________ .

3. Укажите количество целочисленных решений неравенства $x^2-3x-10\leqslant 0$.

1) ∞ 2) 7 3) 8 4) 10

4. Найдите наименьшее целочисленное решение неравенства $\dfrac{2x^2-3x-2}{25-x^2}\geqslant 0$.

Ответ: ______________ .

5. Решите неравенство $|2x+3|\geqslant 7$.

Ответ: ______________ .

6. Решите неравенство $\dfrac{3}{x+1}\geqslant 2$.

1) $[-1;+\infty)$ 2) $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right]$ 3) $(-\infty;2]$ 4) $(-\infty;-1)\cup\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$

7. Дана функция $f(x)=x^2-5x-6$. Решите неравенство $f(|x-2|)\leqslant 0$.

Ответ: ______________ .

8. Решите систему неравенств $\begin{cases}\dfrac{8-x}{x+5}\geqslant 0,\\ |x-5|-|x|\geqslant 0.\end{cases}$

Ответ: ______________ .

Вариант № 6

1. Решите неравенство $49-x^2>0$.

Ответ: ______________ .

2. Укажите наибольшее целочисленное решение неравенства $x^2-5|x|+6\leqslant 0$.

Ответ: ______________ .

3. Укажите наибольшее целочисленное решение неравенства $\dfrac{32-16x}{x-5}\geqslant 0$.

1) 5 2) 2 3) 3 4) 4

4. Из чисел -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5 выберите все те, при которых значения выражения $2x^2 - 3x - 5$ меньше значений выражения $x^2 - 1$. В ответе запишите их сумму.

Ответ: ________________.

5. Решите неравенство $|2x - 5| > 3$.

1) $1 < x < 4$ 2) $x < 1, x > 4$ 3) $x < 1$ 4) $x > 4$

6. Найдите наибольшее целочисленное решение системы неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x-1} \geqslant 1, \\ 21 - 2x \geqslant 17. \end{cases}$$

1) 1 2) 2 3) 7 4) 0

7. Постройте график функции $y = 2{,}5 - 0{,}5x^2$. При каких неотрицательных значениях аргумента выполняется неравенство $0 \leqslant y \leqslant 2{,}5$?

Ответ: ________________.

8. Решите неравенство $|3x + 5| - |x - 4| \leqslant 1$.

Ответ: ________________.

§ 14. Числовые последовательности. Арифметическая и геометрическая прогрессии

Основные сведения

Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом. Это число называют **разностью арифметической прогрессии** и обычно обозначают буквой **d**.

1. Если a_n есть n-й член, d — разность и S_n — сумма n первых членов арифметической прогрессии, то

$$d = a_{n+1} - a_n, \qquad a_n = a_1 + d(n-1),$$
$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \text{ или } S_n = \frac{\big(2a_1 + d(n-1)\big)n}{2}.$$

Арифметическая прогрессия возрастает, если $d > 0$, и убывает, если $d < 0$.

2. Если a_k, a_l, a_m, a_n — члены арифметической прогрессии с такими номерами, что $k + l = m + n$, то $a_k + a_l = a_m + a_n$.

3. Каждый член арифметической прогрессии, отличный от первого и последнего, равен среднему арифметическому соседних с ним членов:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число. Это число называют **знаменателем геометрической прогрессии** и обычно обозначают буквой **q**.

1. Если b_n есть n-й член, q — знаменатель и S_n — сумма n первых членов геометрической прогрессии, то

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}, \qquad b_n = b_1 q^{n-1},$$
$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1.$$

2. Если b_k, b_l, b_m, b_n — члены геометрической прогрессии с такими номерами, что $k + l = m + n$, то $b_k \cdot b_l = b_m \cdot b_n$.

3. Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, отличного от первого и последнего, равен произведению соседних с ним членов:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Если S есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии ($|q| < 1$), то $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

Демонстрационный вариант

1. Из чисел -3, 6, 21, 0 выберите число, которое **не** является членом последовательности $b_n = n^2 - 4$.

1) -3 2) 6 3) 21 4) 0

Решение. Исследуем каждое из предложенных чисел.

1) Пусть $b_n = -3$, тогда $-3 = n^2 - 4$, $n^2 = 1$, $n = \pm 1$, $n \in N$. Значит, $n = 1$. Следовательно, $b_n = -3$ является членом заданной последовательности.

2) Пусть $b_n = 6$, тогда $6 = n^2 - 4$, $n^2 = 10$, $n = \pm\sqrt{10}$, $n \notin N$. Следовательно, $b_n = 6$ не является членом заданной последовательности.

3) Пусть $b_n = 21$, тогда $21 = n^2 - 4$, $n^2 = 25$, $n = \pm 5$, $n \in N$. Значит, $n = 5$. Следовательно, $b_n = 21$ является членом заданной последовательности.

4) Пусть $b_n = 0$, тогда $0 = n^2 - 4$, $n^2 = 4$, $n = \pm 2$, $n \in N$. Значит, $n = 2$. Следовательно, $b_n = 0$ является членом заданной последовательности.

Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

2. Найдите пятый член последовательности, заданной рекуррентной формулой $a_{n+1} = 2a_n - 3$ и условием $a_1 = 2$.

1) 2 2) -5 3) 22 4) -13

Решение. Найдём пятый член последовательным нахождением a_2, a_3, a_4, a_5. $a_2 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$, $a_3 = 2 \cdot 1 - 3 = -1$, $a_4 = 2 \cdot (-1) - 3 = -5$, $a_5 = 2 \cdot (-5) - 3 = -13$.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

3. Из арифметических прогрессий, заданных формулой n-го члена, выберите ту, для которой выполняется условие $a_{12} > 0$.

1) $a_n = -3n$ 2) $a_n = -2n + 24$

3) $a_n = n - 15$ 4) $a_n = 2n - 10$

Решение. По формуле n-го члена для каждой из заданных прогрессий сравним значение a_{12} с нулём.

1) $a_n = -3n,\ a_{12} = -3 \cdot 12 = -36 < 0.$

2) $a_n = -2n + 24,\ a_{12} = -2 \cdot 12 + 24 = 0.$

3) $a_n = n - 15,\ a_{12} = 12 - 15 = -3 < 0.$

4) $a_n = 2n - 10,\ a_{12} = 2 \cdot 12 - 10 = 14 > 0.$

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

4. Найдите знаменатель геометрической прогрессии: $3;\ 1;\ \frac{1}{3};\ldots$

1) 3 2) 2 3) -2 4) $\frac{1}{3}$

Решение. Знаменатель геометрической прогрессии $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{3}$.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

5. Укажите число неотрицательных членов арифметической прогрессии: $13;\ 10;\ 7;\ldots$

1) 5 2) 6 3) 4 4) 10

Решение. Разность заданной прогрессии $d = a_2 - a_1 = 10 - 13 = -3$. Следовательно, $a_4 = a_3 + d = 7 - 3 = 4$, $a_5 = a_4 + d = 4 - 3 = 1$, $a_6 = a_5 + d = 1 - 3 = -2 < 0$. Очевидно, все последующие члены прогрессии являются отрицательными. Значит, заданная прогрессия содержит 5 неотрицательных членов.

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

6. Найдите неизвестный член геометрической прогрессии: $\frac{1}{6};\ \frac{1}{3};\ x;\ \frac{4}{3};\ldots$

1) $\frac{1}{9}$ 2) $\frac{2}{3}$ 3) 1 4) $\frac{1}{2}$

Решение. Неизвестный член заданной геометрической прогрессии найдём по свойству прогрессии:

$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$. Получаем $x = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3}} = \frac{2}{3}$.

Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

7. Найдите сумму первых пяти членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 5$, $d = -2$.

1) -20 2) 15 3) 10 4) 5

Решение. Сумму первых пяти членов заданной арифметической прогрессии найдём по формуле $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.

Получаем $S_5 = \dfrac{2 \cdot 5 - 2(5-1)}{2} \cdot 5 = 5$.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

8. Каждой из последовательностей

А) $3; 5; 7;$ Б) $1; \frac{1}{4}; \frac{1}{9};$ В) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}$

поставьте в соответствие формулу n-ого члена.

1) $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ 2) $a_n = 2n+1$ 3) $a_n = n^2$ 4) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$

Решение. Рассмотрим каждую из заданных последовательностей.

А) $3; 5; 7$ — последовательность нечётных чисел, $a_n = 2n + 1$. Этой последовательности соответствует ответ 2).

Б) Последовательность $1; \frac{1}{4}; \frac{1}{9}$ можно записать в виде: $1; \frac{1}{2^2}; \frac{1}{3^2}$.

Значит, $a_n = \frac{1}{n^2}$. Этой последовательности соответствует ответ 4).

В) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}$ — геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \frac{1}{2}$.

Значит $a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$. Этой последовательности соответствует ответ 1).

Ответ:

А	Б	В
2	4	1

Вариант № 1

1. Какое из чисел является членом последовательности $a_n = n^2 + 2n - 1$?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

2. Найдите рекуррентную формулу для последовательности чисел $3; 1; -1; -3; \ldots$

1) $a_{n+1} = a_n + 2$ 2) $a_{n+1} = a_n - 2$

3) $a_{n+1} = -2a_n$ 4) $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$

3. Из арифметических прогрессий, заданных формулой n-го члена, выберите ту, для которой выполняется условие $a_{15} < 0$.

1) $a_n = 5n$ 2) $a_n = -2n + 50$

3) $a_n = 3n - 48$ 4) $a_n = -3n + 45$

4. Найдите разность арифметической прогрессии, заданной формулой $a_n = 3n - 4$.

Ответ: ________________.

5. Укажите число членов арифметической прогрессии 4, 7, 10, ..., удовлетворяющих условию $a_n \leqslant 48$.

Ответ: ________________.

6. Геометрическая прогрессия задана условиями $b_1 = -12, b_{n+1} = -5b_n$. Найдите b_3.

Ответ: ________________.

7. Найдите сумму первых семи членов геометрической прогрессии, если $b_1 = \frac{1}{4}, q = 2$.

Ответ: ________________.

8. Дана арифметическая прогрессия: 27; 24; 21; ... . Найдите последний положительный член этой прогрессии.

Вариант № 2

1. Числовая последовательность задана формулой n-го члена: $a_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + n + 3}$. Из чисел -3; $\frac{2}{9}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{5}$ выберите то, которое является членом этой последовательности.

1) -3 2) $\frac{2}{9}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) $\frac{4}{5}$

2. Числовая последовательность задана следующими условиями: $a_1 = 2$; $a_{n+1} = 3a_n - 2$. Найдите пятый член этой последовательности.

Ответ: ________________.

3. Выберите арифметическую прогрессию из нижеперечисленных последовательностей.

1) 3; −1; −3; −6; ... 2) 1; 4; 8; 11; ...

3) − 1; −3; −6; −8; ... 4) 2; 6; 10; 14; ...

4. Найдите знаменатель геометрической прогрессии: $\frac{1}{2}$; -1; 2; -4.

Ответ: ________________.

5. Найдите неизвестный член геометрической прогрессии:

$\ldots;\ \frac{1}{8};\ -\frac{1}{4};\ x;\ -1;\ \ldots$

Ответ: ________________.

6. Найдите количество отрицательных членов арифметической прогрессии: -44; -42; -40; ...

Ответ: ________________.

7. Найдите сумму первых девяти членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 7$; $d = 4$.

Ответ: ________________.

8. Последовательность задана формулой $a_n = \frac{24}{n+1}$. Сколько членов этой последовательности больше 6?

Вариант № 3

1. Из чисел -3, -2, 1, 7 выберите то, которое является членом последовательности, заданной формулой $a_n = \frac{(-1)^n \cdot (9-n)}{7}$.

1) 1 2) -2 3) -3 4) 7

2. Найдите четвёртый член последовательности, заданной рекуррентной формулой $a_{n+1} = 2a_n + 1$ и условием $a_1 = 3$.

Ответ: ________________.

3. Выберите арифметическую прогрессию из нижеперечисленных последовательностей.

1) 2; 7; 11; 16; ... 2) 5; 8; 11; 13; ...
3) 7; 9; 10; 12; ... 4) 10; 20; 30; 40; ...

4. Найдите знаменатель геометрической прогрессии: 4; -2; 1 ; $-\frac{1}{2}$.

Ответ: ________________.

5. Укажите число неотрицательных членов арифметической прогрессии: 40; 36; 32; ...

Ответ: ________________.

6. Найдите неизвестный член геометрической прогрессии

...; $\frac{1}{7}$; x; $\frac{16}{7}$; ..., если $\frac{1}{7}$; x; $\frac{16}{7}$ — последовательные члены и $x > 0$.

1) 1 2) $\frac{4}{7}$ 3) $\frac{8}{7}$ 4) другой ответ

7. Найдите сумму первых шести членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 12$, $d = 3$.

Ответ: ________________.

8. В первую минуту гусеница проползает 10 см, а в каждую следующую на 1 см меньше, чем в предыдущую. За сколько минут гусеница проползёт 34 см?

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. Числа 1, 7, 13 являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Какое из следующих чисел также является членом этой прогрессии?

1) 74 2) 107 3) 96 4) 85

2. Какое число является членом арифметической прогрессии
3; 7; 11; 15; ...?

1) 41 2) 46 3) 58 4) 63

3. Последовательности заданы несколькими первыми членами. Одна из них — арифметическая прогрессия. Укажите её.

1) $1; 0; -1; 0; \ldots$ 2) $1; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}; \ldots$

3) $1; \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}; \ldots$ 4) $1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -1; \ldots$

4. Найдите сумму трёх первых членов геометрической прогрессии, если $b_1 = 4$, $q = -2$.

Ответ: ________________.

5. Геометрическая прогрессия b_n задана условиями $b_1 = 4$, $b_{n+1} = b_n \cdot \frac{1}{4}$. Укажите формулу n-го члена этой прогрессии.

1) $b_n = \frac{1}{4^n}$ 2) $b_n = \frac{1}{4^{n-1}}$ 3) $b_n = \frac{1}{4^{n-2}}$ 4) $b_n = \frac{1}{4^{n-3}}$

6. Сумма четырнадцатого и пятого членов арифметической прогрессии равна 25. Найдите сумму первых восемнадцати членов этой прогрессии.

Ответ: _______________.

7. Дана арифметическая прогрессия $15, 12, 9, \ldots$. Какое число стоит в этой последовательности на 96-м месте?

Ответ: _______________.

8. На первой неделе нового учебного года ученик решил 11 задач, а на каждой следующей неделе он решал на 3 задачи больше, чем на предыдущей. Сколько задач решил ученик на 5-й неделе нового учебного года?

Ответ: _______________.

Вариант № 5

1. Чему равна разность арифметической прогрессии, если её первый член равен 3, а пятый — 27?

Ответ: _______________.

2. Найдите сумму первых семи членов геометрической прогрессии $3; 6; 12; \ldots$

Ответ: _______________.

3. Последовательности заданы несколькими первыми членами. Одна из них — арифметическая прогрессия. Укажите её.

1) $2; 3; 5; 6; \ldots$ 2) $-2; -4; -8; -12; \ldots$

3) $4; 1; -2; -5; \ldots$ 4) $1; 2; 4; 8; \ldots$

4. Выписано несколько последовательных членов арифметической прогрессии: $\ldots;\ 15;\ x;\ 1;\ -6; \ldots$ Найдите член прогрессии, обозначенный буквой x.

Ответ: _______________.

5. Геометрическая прогрессия задана условиями $b_1 = 2$, $b_{n+1} = 2b_n$. Какое из данных чисел является членом этой прогрессии?

1) 1 2) 36 3) 32 4) 24

6. В геометрической прогрессии $b_5 \cdot b_{20} = 13$. Найдите $b_3 \cdot b_{22}$.

Ответ: _______________.

7. Арифметическая прогрессия задана условиями $a_1 = 5{,}4$, $a_{n+1} = a_n - 3{,}6$. Найдите сумму первых 9 её членов.

Ответ: _______________.

8. В первом ряду концертного зала 43 места, а в каждом следующем на 3 больше, чем в предыдущем. Сколько мест в пятом ряду?

Ответ: _______________.

Вариант № 6

1. Чему равен знаменатель геометрической прогрессии, если её второй член равен 12, а пятый — 324?

Ответ: ________________.

2. Найдите сумму первых 12 членов арифметической прогрессии $5; 3; 1; -1; \ldots$

Ответ: ________________.

3. Последовательности заданы несколькими первыми членами. Одна из них — геометрическая прогрессия. Укажите её.

1) $1; 2; 6; 8; \ldots$ 2) $2; -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; \ldots$

3) $1; 3; 5; 7; \ldots$ 4) $2; 4; 5; 6; \ldots$

4. Выписано несколько последовательных членов геометрической прогрессии: $\ldots; 24; x; 6; -3; \ldots$ Найдите член прогрессии, обозначенный буквой x.

Ответ: ________________.

5. В арифметической прогрессии (a_n) $a_9 = -56, a_{19} = -80$. Найдите разность прогрессии.

Ответ: ________________.

6. В геометрической прогрессии (b_n) $b_5 = \frac{5}{6}, b_8 = 180$. Найдите знаменатель прогрессии.

Ответ: ________________.

7. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_1 = 25$, $q = -\frac{1}{4}$.

Ответ: ________________.

8. В геометрической прогрессии $b_7 \cdot b_{15} = 25$. Найдите $b_4 \cdot b_{18}$.

Ответ: ________________.

§ 15. Исследование функции и построение графика

Основные сведения

Область определения функции

Областью определения $D(y)$ *функции* $y = f(x)$ называется множество всех значений аргумента x, для которых выражение $f(x)$ определено (имеет смысл).

Области определения основных элементарных функций. Область определения любого многочлена — R.

$$D\left(\frac{1}{x}\right) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$$

$$D\left(\sqrt[2k]{x}\right) = [0;\ +\infty)$$

$$D\left(\sqrt[2k+1]{x}\right) = R$$

Множество значений функции

Множеством (областью) значений $E(y)$ *функции* $y = f(x)$ называется множество всех таких чисел y_0, для каждого из которых найдётся такое число x_0, что $f(x_0) = y_0$.

Области значений основных элементарных функций

Областью значений всякого многочлена чётной степени является промежуток $[m;\ +\infty)$, где m — наименьшее значение этого многочлена, либо промежуток $(-\infty;\ n]$, где n — наибольшее значение этого многочлена.

Областью значений всякого многочлена нечётной степени является R.

$$E\left(\frac{1}{x}\right) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$$

$$E\left(\sqrt[2k]{x}\right) = [0;\ +\infty)$$

$$E\left(\sqrt[2k+1]{x}\right) = R$$

Чётность и нечётность функции

Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = f(x)$. График чётной функции симметричен относительно оси Oy.

Функция $y = f(x)$ называется *нечётной*, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = -f(x)$. График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Графики элементарных функций. На рисунках 55 – 56 изображены графики основных элементарных функций.

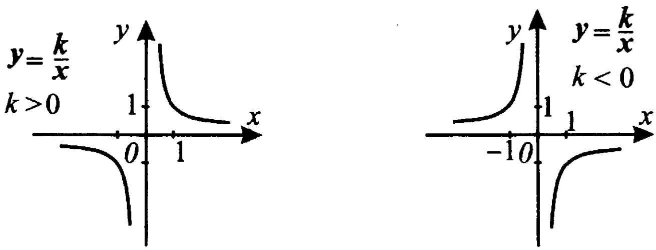


Рис. 55.

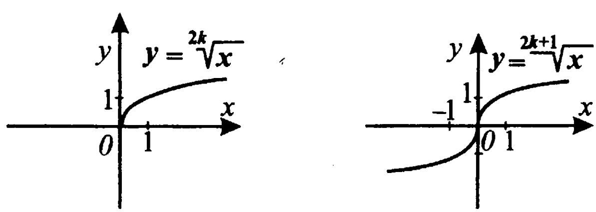


Рис. 56.

Построение графиков функций «механическими» преобразованиями

График функции $y = -f(x)$ получен из графика функции $y = f(x)$ отражением относительно оси Ox (см. рис. 57).

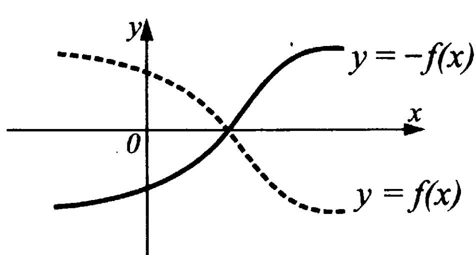


Рис. 57.

График функции $y = f(-x)$ получен из графика функции $y = f(x)$ отражением относительно оси Oy (см. рис. 58).

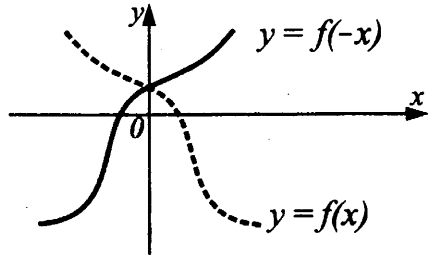


Рис. 58.

График функции $y = m \cdot f(x)$, $m > 1$ получен из графика функции $y = f(x)$ растяжением в m раз вдоль оси Oy от оси Ox (см. рис. 59).

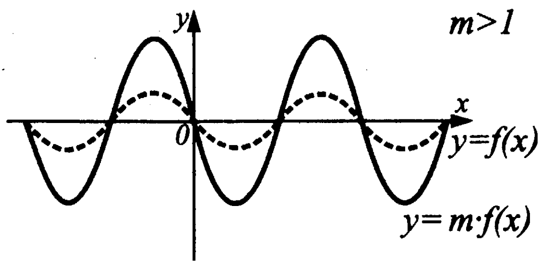


Рис. 59.

График функции $y = m \cdot f(x)$, $0 < m < 1$ получен из графика функции $y = f(x)$ сжатием в $\frac{1}{m}$ раз вдоль оси Oy к оси Ox (см. рис. 60).

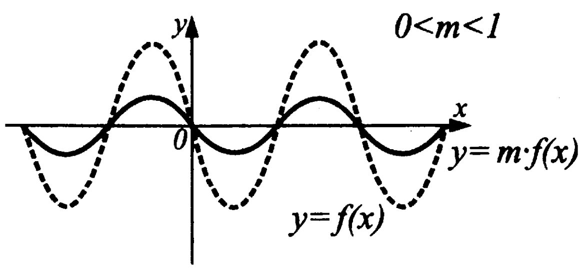


Рис. 60.

График функции $y = f(kx)$, $k > 1$ получен из графика функции $y = f(x)$ сжатием в k раз к оси Oy вдоль оси Ox (см. рис. 61).

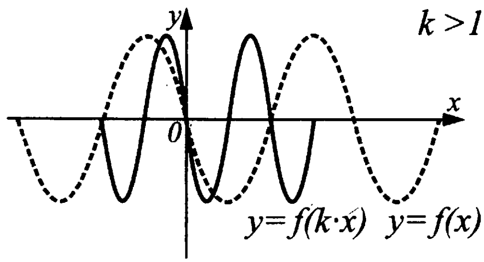


Рис. 61.

График функции $y = f(kx)$, $0 < k < 1$ получен из графика функции $y = f(x)$ растяжением в $\frac{1}{k}$ раз от оси Oy вдоль оси Ox (см. рис. 62).

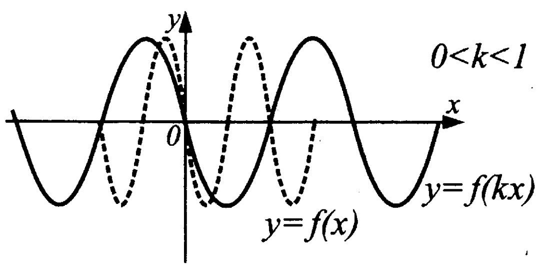


Рис. 62.

График функции $y = f(x) + b$ получен из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вверх на число b при $b > 0$ и сдвигом вниз на число $(-b)$ при $b < 0$ (см. рис. 63).

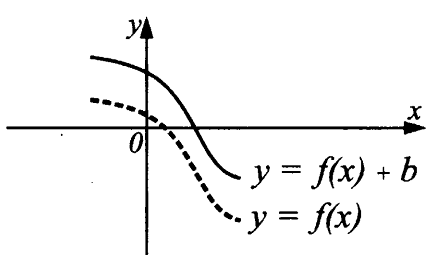


Рис. 63.

График функции $y = f(x + a)$ получен из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вправо на число $-a$ при $a < 0$ и сдвигом влево на число a при $a > 0$ (см. рис. 64).

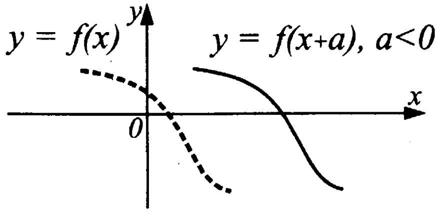


Рис. 64.

График функции $y = |f(x)|$ получен из графика функции $y = f(x)$ (см. рис. 65) отражением относительно оси Ox части этого графика, лежащей ниже оси Ox (см. рис. 66, *а*).

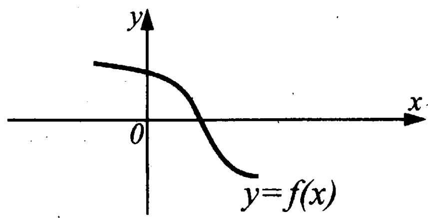


Рис. 65.

График функции $y = f(|x|)$ получен из графика функции $y = f(x)$ (см. рис. 65) объединением части этого графика, лежащей правее оси Oy, с её отражением относительно оси Oy и удалением части, лежащей левее оси Oy (см. рис. 66, *б*).

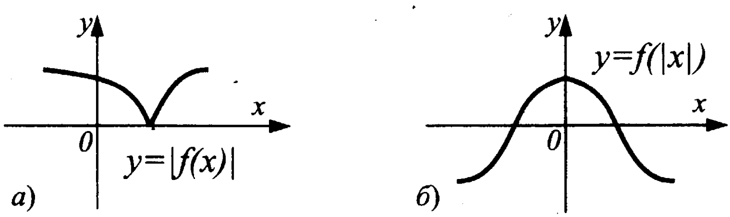


Рис. 66.

Демонстрационный вариант

1. Функция задана формулой $f(x) = x^3 - 4x + 1$. Найдите $f(-2)$.

1) 1 2) 17 3) 3 4) 12

Решение. $f(-2) = (-2)^3 - 4 \cdot (-2) + 1 = -8 + 8 + 1 = 1$.

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

2. График какой из перечисленных ниже функций изображён на рисунке 67?

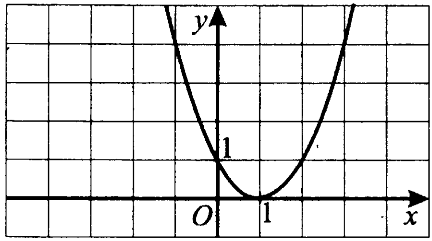


Рис. 67.

1) $y = -x^2 + x$ 2) $y = -(x+1)^2 + 1$
3) $y = (x+1)^2 - 1$ 4) $y = x^2 - 2x + 1$

Решение. На рисунке изображён график квадратичной функции, полученной сдвигом графика функции $y = x^2$ вдоль оси абсцисс на одну единицу вправо (см. «Основные сведения» к параграфу), значит, $y = (x-1)^2$, $y = x^2 - 2x + 1$.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

3. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[0; 8]$. Пользуясь графиком функции (см. рис. 68), укажите промежутки возрастания.

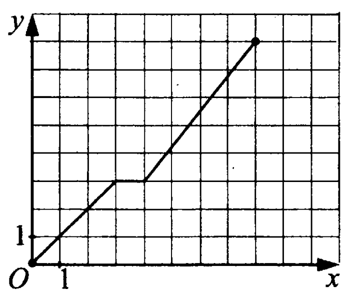


Рис. 68.

1) $[-2; 4]$ 2) $[0; 8]$ 3) $[0; 6] \cup [7; 8]$ 4) $[0; 3] \cup [4; 8]$

Решение. Функция возрастает, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции. По графику определяем, что это условие выполняется на промежутке $[0; 3]$ и на промежутке $[4; 8]$.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

4. На рисунке 69 изображён график функции $y = ax^2 + c$. Определите знаки a и c.

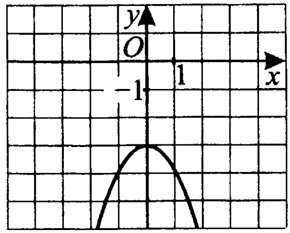


Рис. 69.

Решение. На рисунке изображён график квадратичной функции, полученный сдвигом (см. «Основные сведения» к параграфу) графика функции $y = -x^2$ вдоль оси ординат на 3 единицы вниз, значит, $y = -x^2 - 3$. Следовательно, $a < 0$, $c < 0$.

Ответ: $a < 0$; $c < 0$.

5. Среди функций $y = 5x^5$; $y = |x|$; $y = (x+3)^5$; $y = x^5 + 3$ выберите нечётную.

1) $y = 5x^5$ 2) $y = x^5 + 3$
3) $y = (x+3)^5$ 4) $y = |x|$

Решение. Функция нечётная, если выполняется равенство

$y(-x) = -y(x)$. (*)

Исследуем предложенные функции.

1) $y(x) = 5x^5 \Rightarrow y(-x) = 5(-x)^5 = -5x^5 = -y(x)$ — равенство (*) выполняется.

2) $y(x) = |x| \Rightarrow y(-x) = |-x| = |x| = y(x)$ — равенство (*) не выполняется.

3) $y(x) = (x+3)^5 \Rightarrow y(-x) = (-x+3)^5 = (3-x)^5 \neq -y(x)$ — равенство (*) не выполняется.

4) $y(x) = x^5 + 3 \Rightarrow y(-x) = (-x)^5 + 3 = -x^5 + 3 \neq -y(x)$ — равенство (*) не выполняется.

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

6. Найдите координаты точек пересечения графика функции

$y = \dfrac{2}{x-3} + 1$ с осью абсцисс.

1) $(0; 1)$ 2) $(1; 0)$ 3) $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$ 4) $\left(0; \frac{1}{3}\right)$

Решение. График заданной функции пересекает ось абсцисс в точке с координатами $(x_0; 0)$. Найдём x_0 из условия $y(x_0) = 0$.

$\dfrac{2}{x_0-3}+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2+x_0-3=0, \\ x_0-3\neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow x_0=1$. Следовательно, $(1;0)$ — искомые координаты.

Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

7. Найдите, при каком значении a точка $A(a;3)$ принадлежит графику функции $y=\sqrt{x-4}-2$.

1) 5 2) 29 3) 9 4) 1

Решение. Точка $A(a;3)$ принадлежит графику функции $y=\sqrt{x-4}-2$, если $y(a)=3$.

$\sqrt{a-4}-2=3 \Leftrightarrow \sqrt{a-4}=5 \Leftrightarrow a=29$.

Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

8. По графику функции (см. рис. 70) найдите все значения x, при которых значения функции положительны.

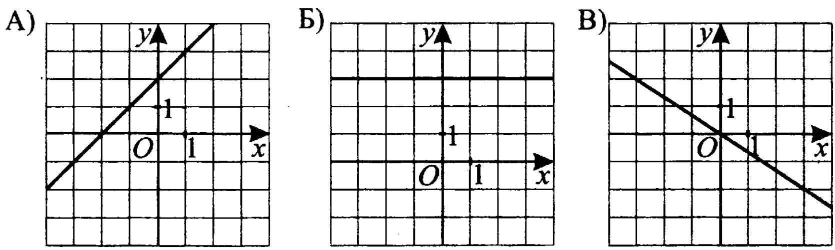


Рис. 70.

Решение. Задача сводится к нахождению значений x, при которых $y>0$.

По графику, изображённому на рисунке 70 А, определяем: $y>0$ при $x>-2$.

По графику, изображённому на рисунке 70 Б, определяем: $y>0$ при любом значении x.

По графику, изображённому на рисунке 70 В, определяем: $y>0$ при $x<0$.

Ответ:

А	Б	В
$(-2;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;0)$

Вариант № 1

1. Найдите область определения функции $y=\sqrt[4]{8-2x}+7$.

1) $(-\infty;4)$ 2) $(-\infty;4]$ 3) $[4;+\infty)$ 4) $(4;+\infty)$

2. График какой из перечисленных функций изображён на рисунке 71?

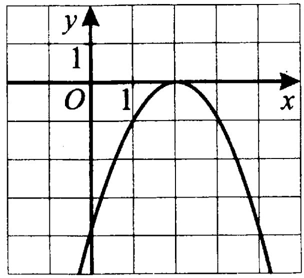


Рис. 71.

1) $y = x^2 + 4x$ 2) $y = -(x-2)^2 - 4$
3) $y = (x-2)^2 + 4$ 4) $y = -x^2 + 4x - 4$

3. Найдите область определения функции $y = \dfrac{2}{\sqrt{4x-1}}$.

1) $\left[\dfrac{1}{4}; +\infty\right)$ 2) $\left(-\infty; \dfrac{1}{4}\right]$

3) $(0{,}25; +\infty)$ 4) $\left(-\infty; \dfrac{1}{4}\right) \cup \left(\dfrac{1}{4}; +\infty\right)$

4. На рисунке 72 изображён график функции $y = ax^2 + c$. Определите знаки a и c.

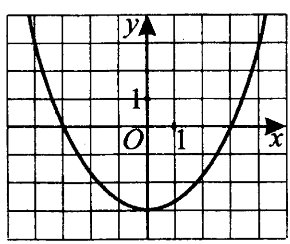


Рис. 72.

Ответ: ________________.

5. На рисунке 73 изображена кубическая парабола. Какая из перечисленных формул задаёт эту функцию?

1) $y = (x-3)^3 + 1$ 2) $y = \left(\dfrac{x}{3}\right)^3 + 2$

3) $y = \left(\dfrac{x+1}{3}\right)^3$ 4) $y = \dfrac{x^3}{3} + 1$

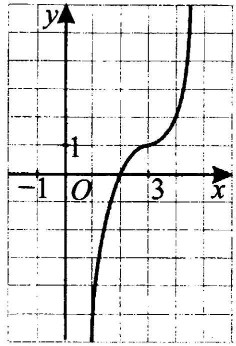


Рис. 73.

6. Найдите абсциссу точки пересечения графика функции $y = \frac{1}{x-2} - 1$ с осью Ox.

Ответ: ________________.

7. Найдите количество точек пересечения графиков функций $y = -\frac{3}{x}$ и $y = -3x$.

Ответ: ________________.

8. Соотнесите функции с их графиками (см. рис. 74).

А) $y = x^2 + 1$ Б) $y = \frac{1}{x-2}$ В) $y = \sqrt{x+2}$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 2

1. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-7; 4]$. Пользуясь графиком функции (см. рис. 75), укажите её область значений.

1) $[-5; 2]$ 2) $[-3; 2]$ 3) $[1; 2]$ 4) $[-3; 1]$

2. Соотнесите функции, заданные формулами, с их графиками, изображёнными на рис. 76.

А) $y = x + 3$ Б) $y = -x - 3$ В) $y = x - 3$

Ответ:

А	Б	В

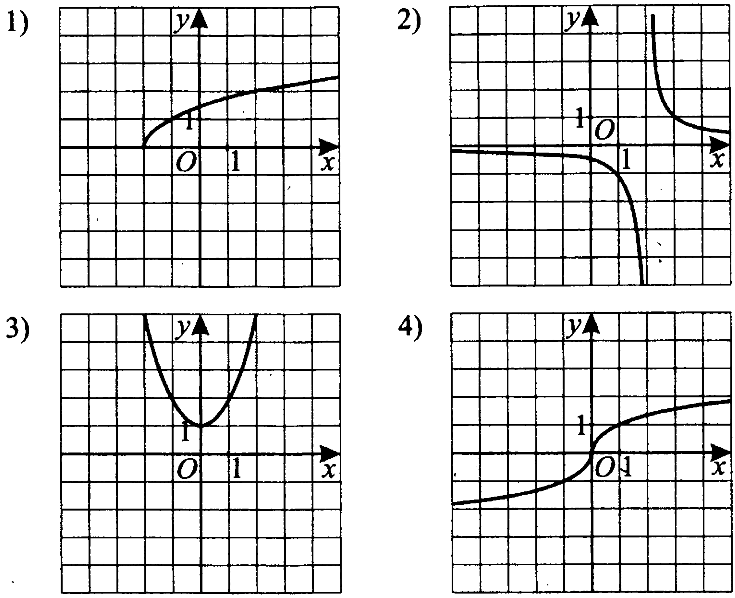


Рис. 74.

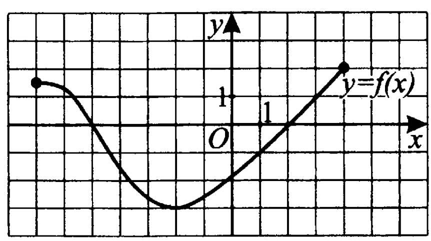


Рис. 75.

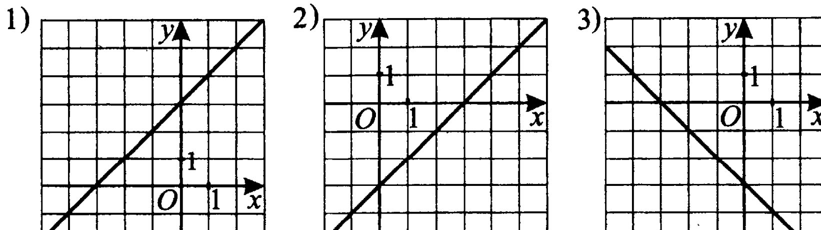


Рис. 76.

3. Укажите уравнение прямой, которая не имеет общих точек с графиком функции $y = -x^2 + 1$.

1) $y = 2$ 2) $y = 1$ 3) $y = 0$ 4) $y = -1$

4. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[-4; 4]$. Используя её график, изображённый на рисунке 77, решите неравенство $f(x) > -1$.

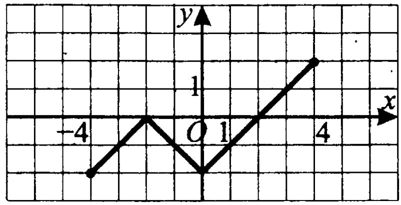


Рис. 77.

Ответ: ________________.

5. На рисунке 78 изображён график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Выберите верное соотношение.

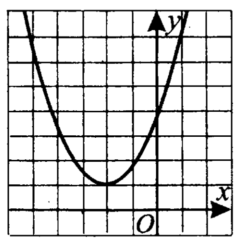


Рис. 78.

1) $a > 0,\ b^2 - 4ac \geqslant 0$ 2) $a < 0,\ b^2 - 4ac < 0$
3) $a > 0,\ b^2 - 4ac < 0$ 4) $a < 0,\ b^2 - 4ac = 0$

6. Найдите значение коэффициента k, если известно, что график функции $y = \dfrac{3k}{x}$ проходит через точку с координатами $(-2; 6)$.

Ответ: ________________.

7. Найдите координаты точки пересечения графика функции $y = \dfrac{3}{x+1} - 2$ с осью абсцисс.

1) $(0{,}5; 0)$ 2) $(0; 0{,}5)$ 3) $(1; 0)$ 4) $(0; 1)$

8. На рисунке 79 изображены графики квадратичных функций:
А) $y = x^2+2$; Б) $y = -x^2+2$; В) $y = (x-2)^2$; Г) $y = -(x-2)^2$.
Для каждой функции укажите соответствующий график.

Ответ:

А	Б	В	Г

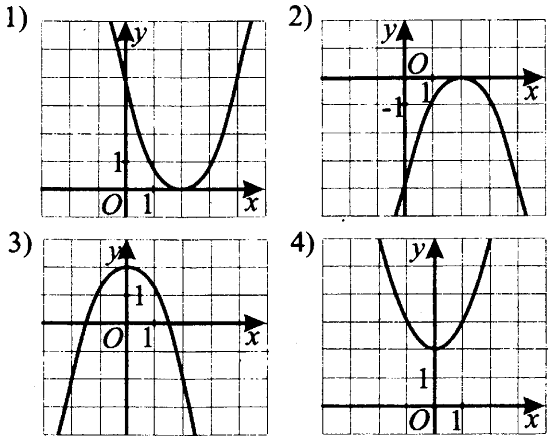


Рис. 79.

Вариант № 3

1. Функция задана формулой $f(x) = -x^2 + 3x - 1$. Найдите $f(-1)$.

1) -5 2) -3 3) 1 4) 2

2. Каждую прямую, построенную на координатной плоскости, соотнесите с её уравнением (см. рис. 80).

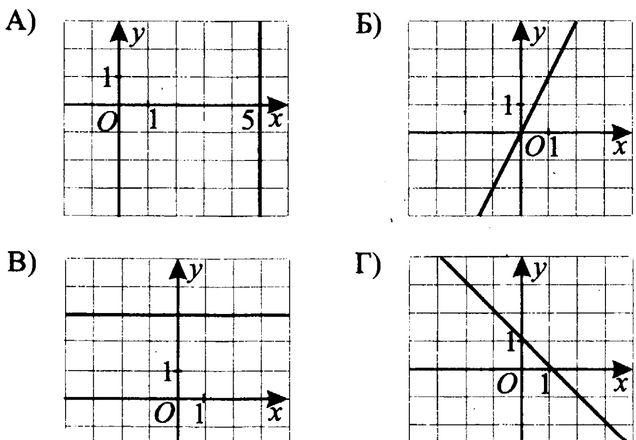


Рис. 80.

1) $x = 5$ 2) $y = 3$ 3) $y = 1 - x$ 4) $y = 2x$

Ответ:

А	Б	В	Г

3. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-3; 5]$. Пользуясь графиком функции (см. рис. 81), укажите промежутки возрастания.

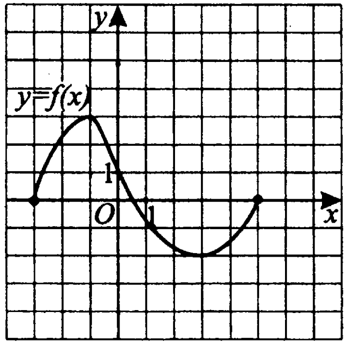


Рис. 81.

1) $[-3; 0]$ 2) $[1; 5]$ 3) $[-1; 3]$ 4) $[-3; -1] \cup [3; 5]$

4. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[-4; 4]$. Используя её график, изображённый на рисунке 82, решите неравенство $f(x) > 0$.

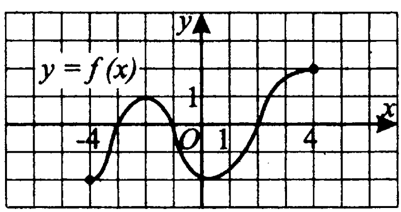


Рис. 82.

Ответ: ________________.

5. Из функций $y = 3x^4$; $y = 2x^5$; $y = (x-2)^2$; $y = x^3 - 2$ выберите чётную.

1) $y = 3x^4$ 2) $y = 2x^5$ 3) $y = (x-2)^2$ 4) $y = x^3 - 2$

6. Найдите, при каком k график функции $y = \dfrac{k}{x}$ проходит через точку $A(-6\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

Ответ: ________________.

7. Найдите, при каком значении a точка $A(a; 5)$ принадлежит графику функции $y = \sqrt[3]{x+1} + 3$.

1) 10 2) 7 3) 6 4) 5

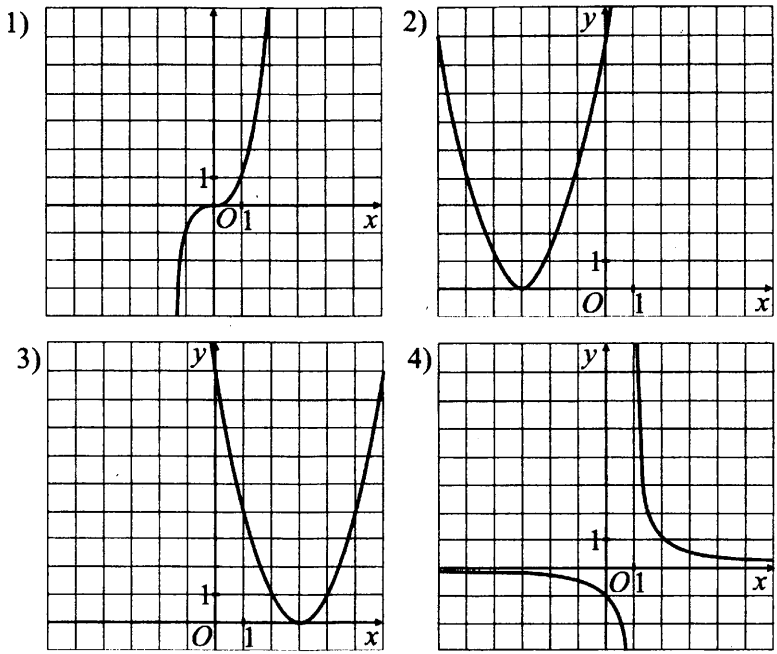


Рис. 83.

8. Соотнесите функции с их графиками (см. рис. 83).

А) $y = (x-3)^2$ Б) $y = \dfrac{2}{x-1}$ В) $y = x^3$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 4

1. Функция задана формулой $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3$. Найдите $f(-2)$.

1) -19 2) 13 3) 0 4) -3

2. Каждую прямую, построенную на координатной плоскости, соотнесите с её уравнением (см. рис. 84).

1) $x = -1$ 2) $y = x$ 3) $y = -x$ 4) $y = -3$

Ответ:

А	Б	В	Г

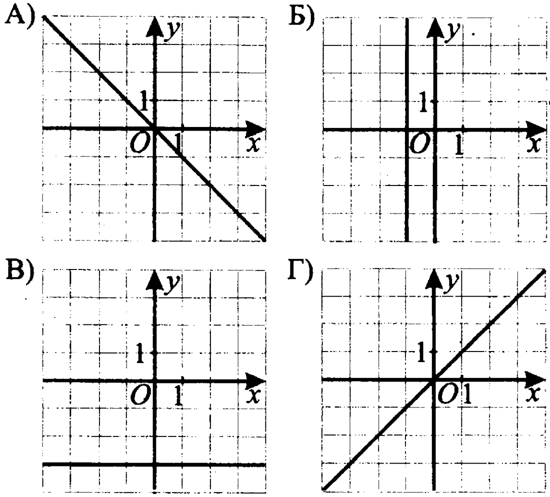


Рис. 84.

3. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-4; 4]$ и задана своим графиком (см. рис. 85). На отрезке $[-4; 4]$ укажите её промежутки убывания.

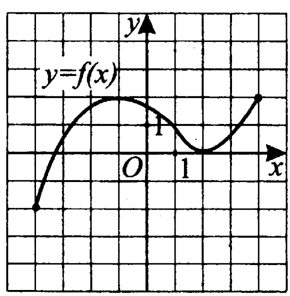


Рис. 85.

1) $[-4; -3]$ 2) $[-1; 2]$ 3) $[-3; 2]$ 4) другой ответ

4. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[-4; 3)$ и задана своим графиком (см. рис. 86). Укажите область значений функции $y = f(x)$ на промежутке $[-4; 3)$.

1) $[0; 2)$ 2) $[-2; 0]$ 3) $[-2; 2]$ 4) другой ответ

5. Из функций $y = 3x^2$; $y = 2x^5$; $y = x^4 + 1$; $y = (x - 1)^3$ выберите нечётную.

1) $y = 3x^2$ 2) $y = 2x^5$ 3) $y = x^4 + 1$ 4) $y = (x - 1)^3$

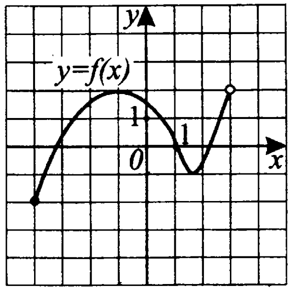


Рис. 86.

6. Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = |x - 3|$ с осью Oy.

1) $(2;0)$ 2) $(0;2)$ 3) $(0;3)$ 4) $(-3;3)$

7. При каком значении a точка $M(a;2)$ принадлежит графику функции $y = \sqrt{2-x} - 1$?

Ответ: ________________ .

8. Соотнесите графики функций, изображённых на рисунке 87, с соответствующими им значениями параметра k.

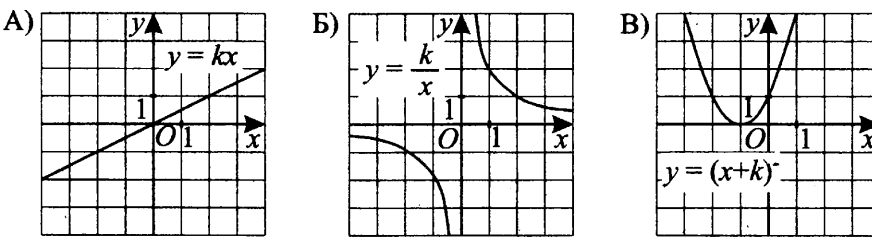


Рис. 87.

1) 2 2) 1 3) -1 4) $\frac{1}{2}$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 5

1. Функция $y = f(x)$ задана графиком на отрезке [-5;5] (см. рис. 88). Найдите $f(-2)$.

1) 1 2) 2 3) 3 4) -1

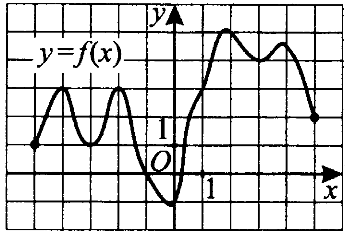


Рис. 88.

2. Соотнесите функции, заданные формулами, и их графики (см. рис. 89).

А) $y = 3 - x$ Б) $y = 2x$ В) $y = |x|$

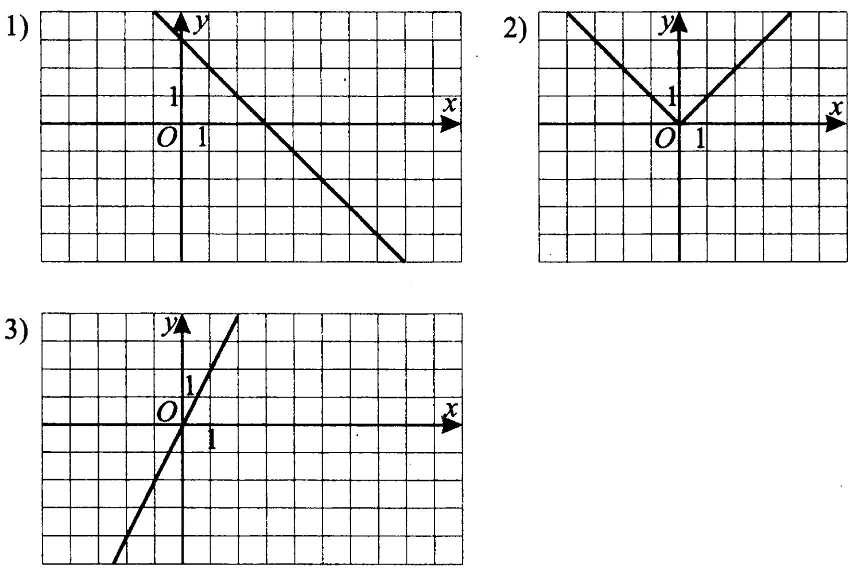


Рис. 89.

Ответ:

А	Б	В

3. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[-5; 5]$ (см. рис. 90). Какой из указанных промежутков является промежутком знакопостоянства данной функции?

1) $[-3; 0]$ 2) $[0; 3]$ 3) $[-2; 1]$ 4) $[1; 5]$

4. Найдите область значений функции, указанной на рисунке 90.

1) $[-5; 5]$ 2) $[0; 5]$ 3) $[-1; 5]$ 4) $[-1; 4]$

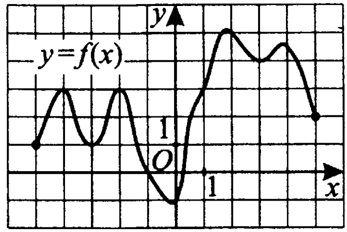


Рис. 90.

5. Какая из следующих функций является возрастающей?

1) $y = x^3$ 2) $y = \frac{1}{2^x}$ 3) $y = 1 - x$ 4) $y = -2^x$

6. Найдите координаты точки пересечения графиков функций $y = (x-2)^2 + 2$ и $y = x^2$.

1) $(2; 2)$ 2) $(0{,}5; 0{,}25)$ 3) $(1{,}5; 2{,}25)$ 4) $(0; 0)$

7. Найдите значение m, при котором точка $A(m; 2m+3)$ принадлежит графику функции $y = x^2 - 4x + 12$.

1) 3 2) 2 3) -1 4) 0

8. Соотнесите функции и их графики (см. рис. 91).

А) $y = x^3$ Б) $y = \sqrt{x}$ В) $y = |x|$

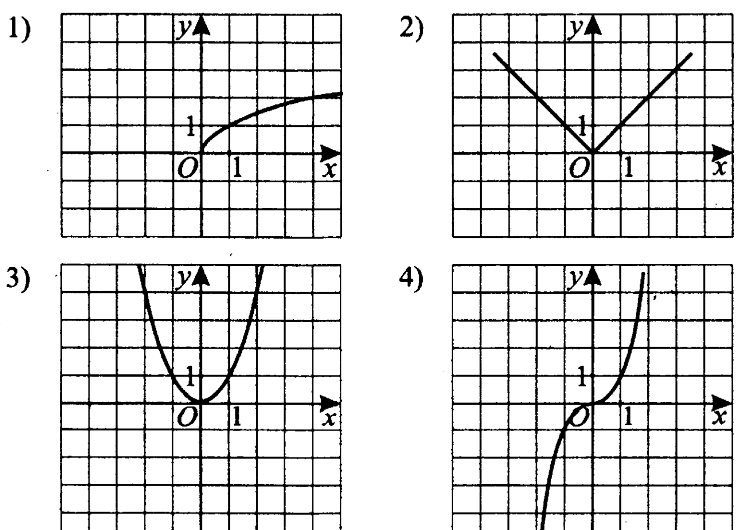


Рис. 91.

Ответ:

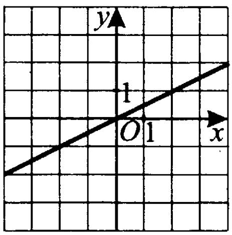
А	Б	В

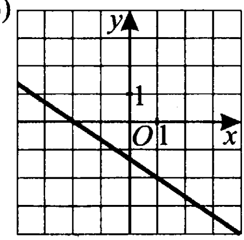
Вариант № 6

1. Найдите область определения функции $y = 3 - \sqrt{3 - 3x}$.

1) $(-\infty; 3]$ 2) $(-\infty; 1]$ 3) $[3; +\infty)$ 4) $[1; +\infty)$

2. Соотнесите рисунок, изображающий график функции $y = kx + b$ (см. рис. 92), с одним из условий 1), 2) или 3).

А)


Б)


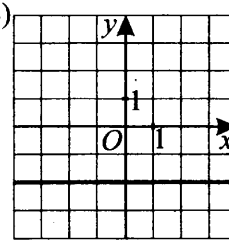
В)


Рис. 92.

1) $k < 0;\ b < 0$ 2) $k = 0;\ b < 0$ 3) $k > 0;\ b = 0$

Ответ:

А	Б	В

3. На рисунке 93 изображён график квадратичной функции. Какая из перечисленных формул задаёт эту функцию?

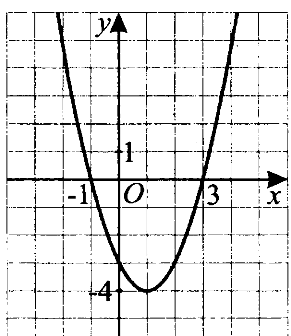


Рис. 93.

1) $y = x^2 - 2x - 3$ 2) $y = -x^2 - 2x - 3$

3) $y = x^2 + 2x - 3$ 4) $y = -x^2 - 2x + 3$

4. По графику квадратичной функции (см. рис. 94) найдите все значения x, при которых значения функции неотрицательны.

Ответ: ________________.

5. По графику квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ определите значение свободного члена c (см. рис. 95).

Ответ: ________________.

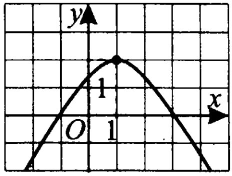


Рис. 94.

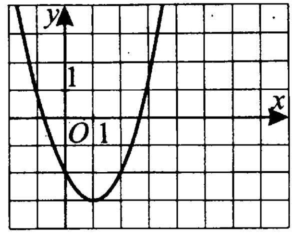


Рис. 95.

6. Какая из точек $A(2;-3)$, $B(-3;-1)$, $C(-2;-2)$, $D(0{,}5;-11)$ принадлежит графику функции $y=f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x}, \text{ если } -3\leqslant x<0,\\ x^2, \text{ если } 0\leqslant x<1,\\ 5x+1, \text{ если } x\geqslant 1?\end{cases}$$

1) A 2) B 3) C 4) D

7. Найдите сумму координат точки пересечения графиков функций $y=\sqrt{x}$ и $y=\dfrac{8}{x}$.

Ответ: __________________.

8. На рисунке 96 схематически изображены графики двух зависимостей:
А) зависимости площади трапеции от её высоты при постоянной сумме оснований;
Б) зависимости высоты трапеции от суммы её оснований при постоянной площади.
Какой из них — 1 или 2 — является графиком зависимости А?

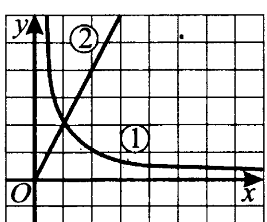


Рис. 96.

Ответ: __________________.

§ 16. Представление данных в виде таблиц, диаграмм и графиков

Основные сведения

График — чертёж, наглядно изображающий количественное соотношение и развитие взаимосвязанных процессов или явлений в виде кривой, прямой, ломаной линии, построенной в той или иной системе координат.

График применяют как для наглядного изображения функциональной зависимости и придания наглядности исследованию, так и для быстрого фактического нахождения значений функции по значениям аргумента.

Графики могут определять последовательность выполнения действий, протекания событий во времени. Например, график движения поездов, график дежурств, график работы.

Диаграмма (греч. diagramma — изображение, рисунок, чертёж) — графическое представление данных, позволяющее быстро оценить соотношение нескольких величин, выполненное при помощи линий, плоскостей, геометрических фигур, рисунков и т.д.

Таблица (лат. tabula — доска) — способ передачи содержания, заключающийся в организации структуры данных, в которой отдельные элементы помещены в ячейки, каждой из которых соответствует пара значений — номер строки и номер столбца. Таким образом, устанавливается смысловая связь между элементами, принадлежащими одному столбцу или одной строке.

Демонстрационный вариант

1. Муравей поднялся вверх по стволу дерева, сделав одну остановку для отдыха, и спустился вниз. График, изображённый на рисунке 97, показывает, как менялась высота S, на которой находился муравей, в зависимости от времени t (по вертикальной оси откладывается высота в метрах, по горизонтальной — время в минутах). Используя график, определите, находясь на какой высоте, муравей решил отдохнуть. Ответ дайте в метрах.

Решение. Если муравей отдыхал, то высота S, на которой он находился, не изменялась, изменялось только время t. На основании данных графика делаем вывод: муравей отдыхал на высоте 8 м.

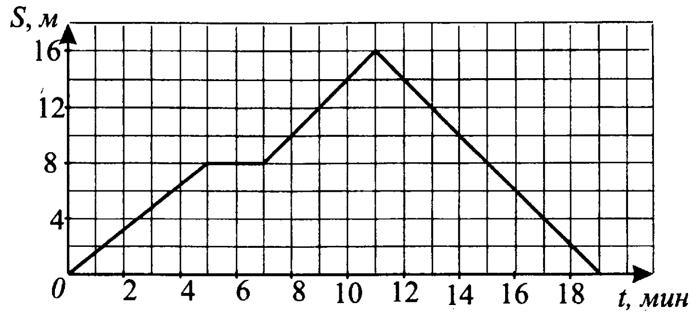


Рис. 97.

Ответ: 8.

2. Мальчик пошёл вниз к реке, отдохнул у реки и вернулся обратно. На рисунке 98 изображён график движения мальчика. Определите, пользуясь графиком,

а) сколько минут отдыхал мальчик у реки;

б) скорость мальчика на подъёме (в км/ч);

в) сколько минут заняла ходьба.

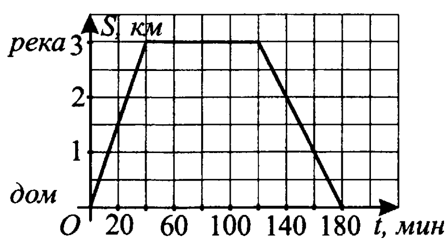


Рис. 98.

Решение. а) На графике время в минутах откладывается по горизонтальной оси. Одной клетке графика соответствует 20 минут. Во время отдыха расстояние не изменялось (то есть времени отдыха на графике соответствует отрезок горизонтальной прямой). Следовательно, время, затраченное на отдых: $20 \cdot 4 = 80$ мин.

б) Согласно условию задачи, подъём был по дороге от реки домой. Согласно графику, подъём осуществлялся со 120 мин. по 180 мин. Следовательно, время, затраченное на подъём: $180 - 120 = 60$ мин. $= 1$ час. Река от дома находится на расстоянии 3 км, значит, скорость на подъёме была $3 : 1 = 3$ км/ч.

в) Мальчик отсутствовал дома 180 минут. Из них 80 минут отдыхал, значит, ходьба заняла $180 - 80 = 100$ (мин.).

Ответ: а) 80; б) 3; в) 100.

3. На рисунке 99 изображён график изменения температуры воздуха в течение суток, автоматически записанный с помощью специального прибора — самописца. Используя этот график, найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями температуры в течение суток.

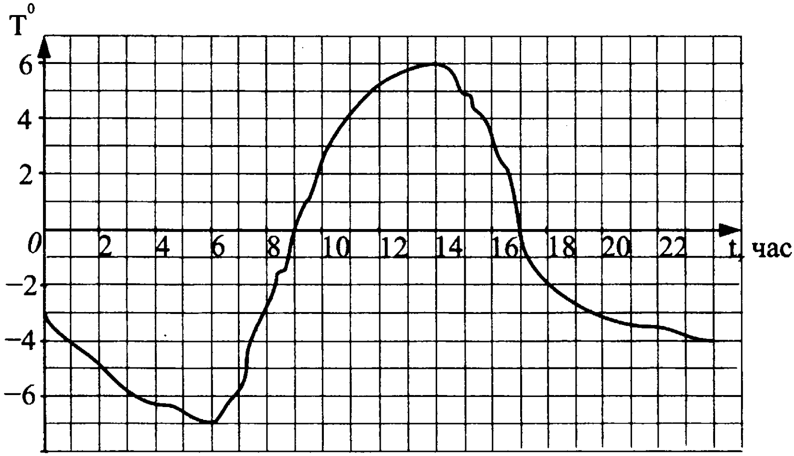


Рис. 99.

Решение. По графику определяем, что в течение суток наименьшая температура была $-7°C$, а наибольшая — $+6°C$. Разность между наибольшим и наименьшим значениями температуры: $6-(-7)=6+7=13$.

Ответ: 13.

4. На графиках (см. рис. 100) показано количество мальчиков и девочек, рождённых в городе N в течение года. На сколько число родившихся девочек в период с марта по май включительно больше числа мальчиков, родившихся за этот же период?

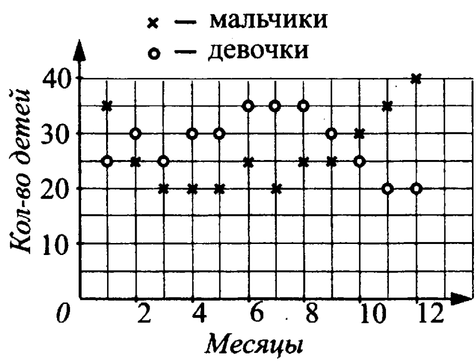


Рис. 100.

Решение. Число мальчиков и девочек, родившихся с марта по май, представлено в таблице.

	март	апрель	май	Итого
мальчики	20	20	20	60
девочки	25	30	30	85

Девочек родилось на $85 - 60 = 25$ больше, чем мальчиков.

Ответ: 25.

5. На рисунке 101 представлены графики показаний счётчиков расхода горячей воды в течение 60 дней школой и жилым домом. Какой объект больше израсходовал горячей воды в период с 20-го по 40-й день включительно и на сколько м^3?

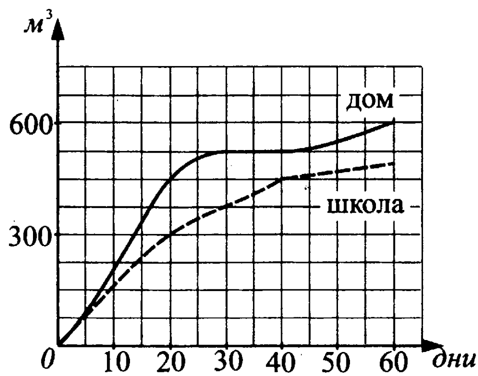


Рис. 101.

Решение. Найдём количество воды, израсходованное в период с 20-го по 40-й день включительно. Учитывая, что одной клетке графика соответствует 75 м^3 воды, определяем:

школа израсходовала $75 \cdot 2 = 150$ м^3;

дом — $75 \cdot 1 = 75$ м^3.

Следовательно, школа израсходовала горячей воды больше, чем жилой дом, на $150 - 75 = 75$ (м^3).

Ответ: школа, на 75.

6. В магазине игрушек представлены следующие цены на различные типы настольных игр:

Тип игры	A	B	C	D	E	F	G	H	K
Цена (руб.)	430	500	430	520	320	610	440	710	260

Определите количество типов игр, стоимость которых не превышает 430 рублей.

Решение. К играм, стоимость которых не превышает 430 рублей, то есть меньше либо равна 430 рублей, относятся типы A, C, E, K. Условию задания удовлетворяют 4 типа настольных игр.

Ответ: 4.

7. В таблице приведена стоимость работ по покраске стен.

Цвет стен	**Цена в рублях за 1 м^2 в зависимости от площади**		
	до 40 м^2	от 40 до 100 м^2	более 100 м^2
Белый	80	75	70
Другой	100	90	80

Пользуясь данными, представленными в таблице, определите, какова будет стоимость работ, если площадь стен 70 м^2, цвет — «Другой» (не белый) и действует сезонная скидка 10%.

Решение. Условию задачи соответствует ячейка таблицы, находящаяся на пересечении столбца «Цена в рублях за 1 м^2 от 40 до 100 м^2» и строки «Цвет стен „Другой“». Значит, цена за 1 м^2 составит 90 рублей, а за 70 м^2 — $90 \cdot 70 = 6300$ (рублей). Учитывая 10%-ную скидку, определяем, что стоимость работ будет равна $\dfrac{6300 \cdot (100\% - 10\%)}{100\%} = 5670$ (руб.).

Ответ: 5670.

8. Сотрудники двух салонов сотовой связи X и Y поспорили между собой, кто продаст больше телефонов в течение двух недель. На рисунке 102 показана зависимость общего числа проданных телефонов от времени. Жирными точками указано количество телефонов, проданных от начала отсчёта до конца дня, отмеченного на оси абсцисс. Для наглядности жирные точки соединены линиями. Какой салон продал больше телефонов с начала четверга до конца пятницы второй недели и на сколько больше?

Решение. По графику определим количество продаж телефонов каждым салоном со среды по пятницу второй недели.

Салон X продал $1000 - 700 = 300$ (штук).

Салон Y продал $700 - 600 = 100$ (штук).

Следовательно, салон X продал за указанный период на $300 - 100 = 200$ (штук) телефонов больше, чем салон Y.

Ответ: салон X, на 200.

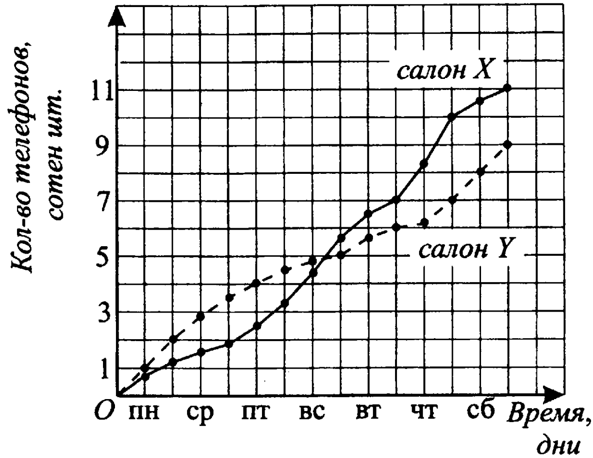


Рис. 102.

Вариант № 1

1. В течение четырёх суток измеряли температуру воздуха (см. рис. 103). В какой день колебания температуры были максимальны?
(По оси абсцисс откладывается время в сутках, а по оси ординат — температура.)

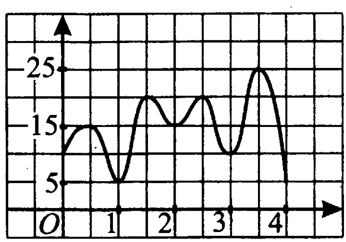


Рис. 103.

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

2. Велосипедист поехал от дома вниз к реке, отдохнул у реки и вернулся обратно. На рисунке 104 изображён график движения велосипедиста. Определите, пользуясь графиком:

а) сколько минут отдыхал велосипедист;

б) скорость велосипедиста на спуске к реке (в км/ч);

в) сколько минут заняла езда на велосипеде.

Ответ: ________________.

3. На соревнованиях в пятидесятиметровом бассейне спортсмен проплывает 150-метровую дистанцию. На рисунке 105 показан график изменения расстояния между пловцом и точкой старта во время заплыва.

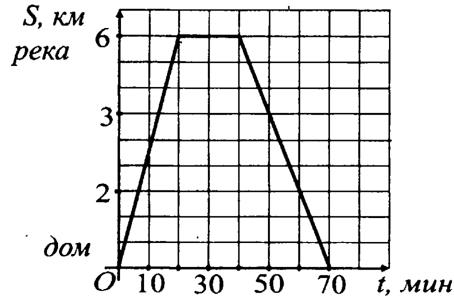


Рис. 104.

Используя график, ответьте на вопрос: на какой по счёту пятидесятиметровке пловец плыл медленнее всего?

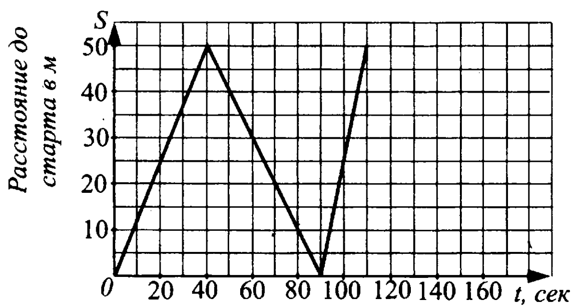


Рис. 105.

Ответ: ________________.

4. Легковая машина едет по горному серпантину. На рисунке 106 изображён график её движения. На каком отрезке времени скорость автомобиля была наибольшей?

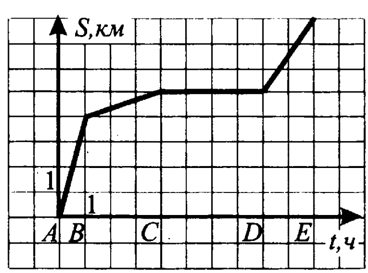


Рис. 106.

1) от A до B 2) от B до C 3) от C до D 4) от D до E

5. На графиках (см. рис. 107) показана зависимость количества произведённых рабочими А и Б деталей от времени. Какой из рабочих произвёл деталей больше в период с 3-го по 6-й час рабочего времени и на сколько больше?

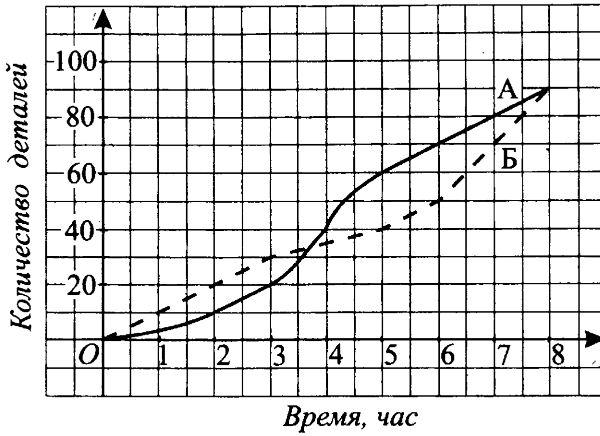


Рис. 107.

Ответ: ________________.

6. Пчела летает от улья к цветку и обратно. На цветке она какое-то время собирает пыльцу. Расстояние от улья до цветка равно 5 м. На рисунке 108 изображён график зависимости расстояния между пчелой и ульем от времени движения пчелы. Определите, какое расстояние (в метрах) пролетела пчела за первые 40 секунд.

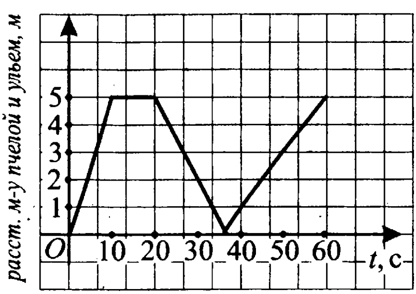


Рис. 108.

7. На рисунке 109 изображён график зависимости скорости v некоторого объекта (в км/ч) от времени t (в ч). Найдите скорость (в км/ч) объекта при $t = 2$ ч.

8. На графике (см. рис. 110) показана зависимость общего количества зерна, собранного каждым из комбайнов A и B, от времени. Какой комбайн собрал больше зерна с 5-го по 8-й день уборки и на сколько тонн больше?

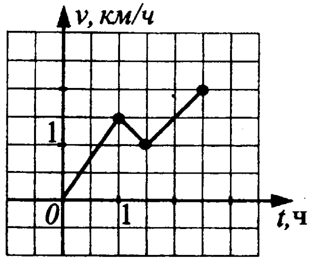


Рис. 109.

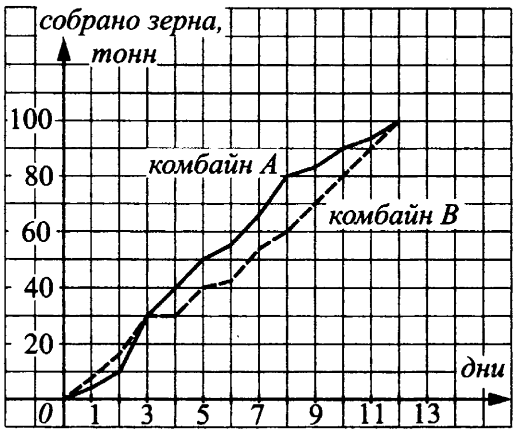


Рис. 110.

Вариант № 2

1. Банк предлагает 2 схемы выплаты кредита на товар:
схема I — равными платежами;
схема II — с начислением процентов на оставшуюся сумму кредита.
На рисунке 111 приведены графики зависимости выплачиваемой по кредиту суммы денег от времени, прошедшего с момента выдачи кредита.

Определите, на сколько тыс. руб. больше заплатит клиент банка, взявший кредит на 1 год, если воспользуется схемой I, а не схемой II.

1) 10 тыс. руб. 2) 20 тыс. руб. 3) 30 тыс. руб. 4) 40 тыс. руб.

2. На рисунке 112 изображён график зависимости скорости ракеты v (в м/с) от времени t (в с), прошедшего с момента начала наблюдения за ней. Через какое время после начала наблюдения ракета наберёт скорость 800 м/с?

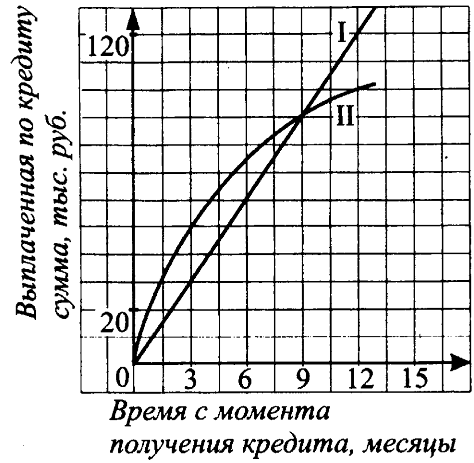


Рис. 111.

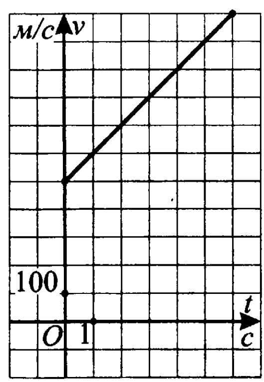


Рис. 112.

3. В тонком неоднородном стержне длиной 8 см его масса (в граммах) распределяется по закону $m = l^2 + 3l$, где l — длина стержня, отсчитываемая от его начала. Чему равны А, Б, В?

l — длина (в см)	А	4	8
m — масса (в г)	10	Б	В

Ответ: ________________.

4. Мальчик собирает вишню в ведро. Масса вишни в полном ведре 10 кг. Когда ведро наполняется, мальчик его осторожно освобождает и начинает снова собирать вишню. На рисунке 113 изображён график зависимости массы вишни в ведре от времени. Сколько всего вишни (в кг) было собрано за первые 1,5 часа?

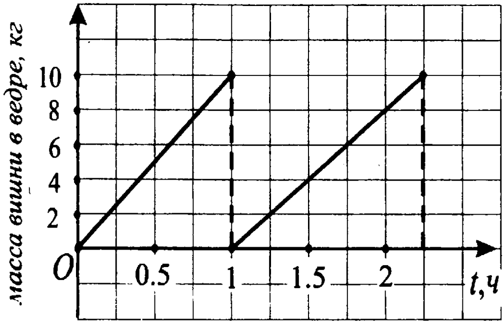


Рис. 113.

1) 4 2) 14 3) 18 4) 24

5. Некоторое тело движется из начала координат прямолинейно равноускоренно, и расстояние S от начала координат определяется формулой $S = 2t^2 + 7t$, где t — время, прошедшее с момента начала движения. Заполните таблицу.

t — время (в с)		2	
S — расстояние (в м)	4		49

6. Путник прошёл от пункта B до пункта A и вернулся обратно. На рисунке 114 изображён график его движения: по горизонтальной оси откладывается время движения, по вертикальной — длина пути от пункта B до положения путника. Сколько километров прошёл путник с 2 до 6 часов от начала движения.

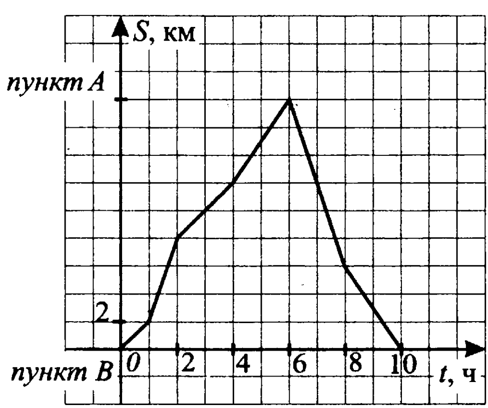


Рис. 114.

7. Два мяча подбросили вертикально вверх, и они упали на землю. На рисунке 115 изображены графики зависимости высоты мячей над землёй от времени полёта. Используя графики, выясните, какой из мячей за первые 2 секунды пролетел больше метров и на сколько больше.

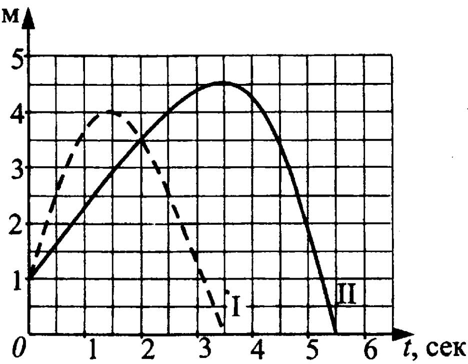


Рис. 115.

Ответ: ________________ .

8. На графике показано движение двух объектов. Какой из них пройдёт большее расстояние в период с 20-й по 50-ю минуты и на сколько метров больше (см. рис. 116)?

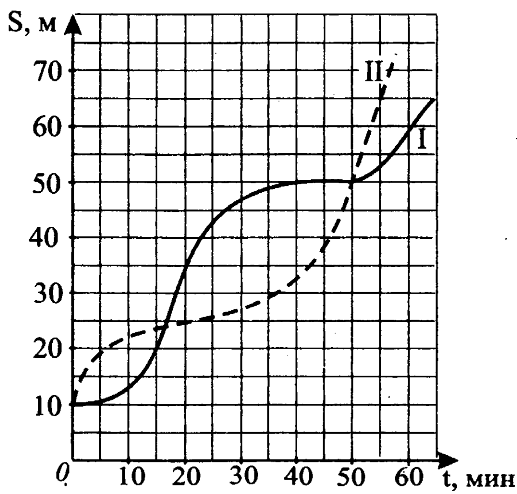


Рис. 116.

Ответ: ________________ .

Вариант № 3

1. Пять лучших результатов районной олимпиады по физике представлены в таблице:

Фамилия ученика	Иванов	Петров	Буслов	Юрьев	Смирнов
Кол-во баллов	24,8	25,3	24,5	25,7	24,1

Какой ученик занял 4-е место?

1) Буслов 2) Петров 3) Юрьев 4) Иванов

2. На рисунке 117 изображён график движения тела, брошенного вертикально вверх. Найдите по графику,

а) сколько секунд тело поднималось вверх;

б) какой наибольшей высоты (в метрах), считая от земли, достигло тело;

в) через сколько секунд от начала движения тело упало на землю.

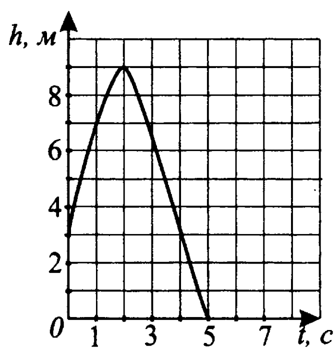


Рис. 117.

Ответ: ________________.

3. Шесть различных полей засеяли кукурузой. Измерения уровня всхожести приведены в таблице:

№ поля	I	II	III	IV	V	VI
Уровень всхожести, %	85,7	87,6	88,5	87,8	88,4	87,9

Какое поле оказалось на пятом месте по уровню всхожести?

1) I 2) II 3) III 4) IV

4. Коллекция моделей одежды разной цветовой гаммы представлена в виде диаграммы (см. рис. 118). Сколько в коллекции моделей красного цвета, если всего в ней 800 моделей?

Ответ: ________________.

Рис. 118.

5. В тонком неоднородном стержне длиной 10 см его масса (в граммах) распределяется по закону $m = l^2 + 5l$, где l — длина стержня, отсчитываемая от его начала. Заполните таблицу.

l — длина (в см)		5	10
m — масса (в г)	6		

6. Состав сплава массой 75 кг представлен на диаграмме (см. рис. 119). Сколько килограммов железа содержится в этом сплаве?

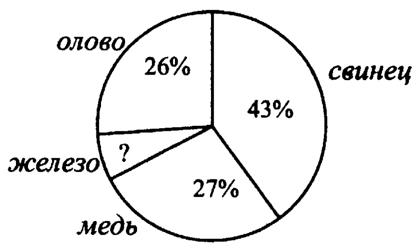


Рис. 119.

1) 5 2) 12 3) 3 4) 60

7. На рисунке 120 изображены графики зависимости количества решённых задач на экзамене от времени для учеников А и Б. Кто решил больше задач за последний час и на сколько?

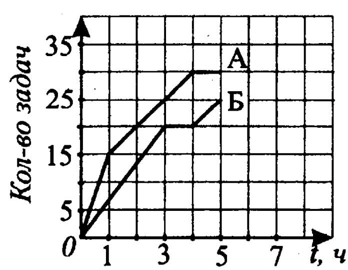


Рис. 120.

Ответ: ________________.

8. На рисунке 121 изображены графики продаж телефонов салонами сотовой связи *А* и *Б* в течение двух недель. Жирными точками указано количество телефонов, проданных от начала до конца дня, отмеченного на оси абсцисс. Для наглядности жирные точки соединены линиями. Какой салон продал больше телефонов с пятницы первой недели по пятницу второй и на сколько?

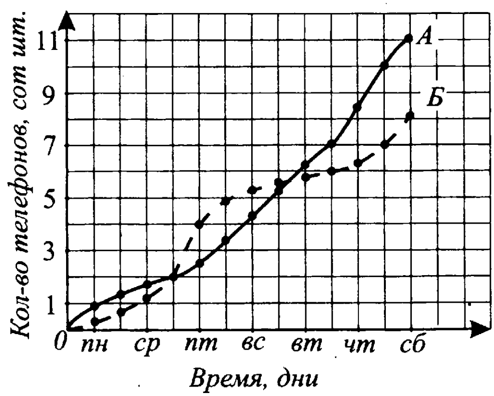


Рис. 121.

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. На рисунке 122 изображены графики движения лодки и катера, вышедших из одной пристани в одном направлении. Определите, пользуясь графиком,

а) на каком расстоянии (в километрах) от пристани катер догнал лодку;

б) через сколько часов после выхода катера произошла встреча;

в) на каком расстоянии друг от друга были лодка и катер в 12 часов.

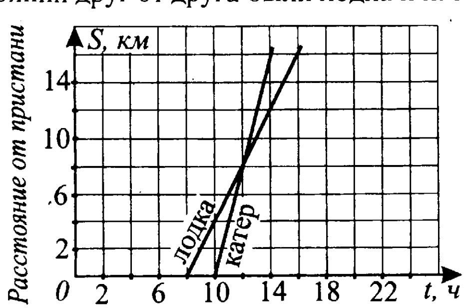


Рис. 122.

Ответ: ________________.

2. На рисунке 123 изображён график движения тела, брошенного вертикально вверх. Найдите по графику,

а) сколько времени тело поднималось вверх;

б) какой наибольшей высоты достигло тело;

в) через сколько секунд тело упало на землю.

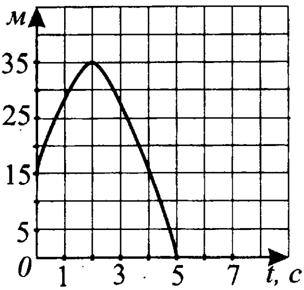


Рис. 123.

Ответ: ________________ .

3. Турист собрался в поход. В походе он сделал два привала и после второго привала вернулся на турбазу. На рисунке 124 изображён график движения туриста. Какова средняя скорость (в км/ч) туриста за всё время движения? (Время на привалы не учитывать.)

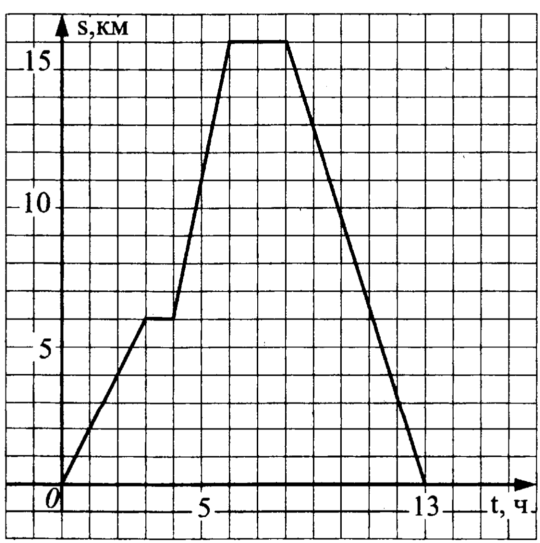


Рис. 124.

1) $\frac{16}{13}$ 2) $\frac{13}{16}$ 3) $\frac{8}{5}$ 4) $\frac{16}{5}$

4. Результаты анализа полученной предприятием прибыли за год представлены в виде круговой диаграммы (см. рис. 125). Какая прибыль (в рублях) была получена предприятием в 3-м квартале, если за год прибыль составила 2400 тыс. рублей?

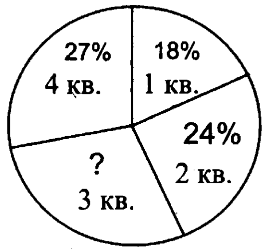


Рис. 125.

1) 656 000 2) 701 200 3) 744 000 4) 810 000

5. В специализированном магазине одежды продаётся 50 видов костюмов. Они распределены по цене (граничную цену относят к более высокой категории):

Цена (тыс. руб.)	до 4-х	4 – 7	7 – 10	10 – 13	$\geqslant 13$
Кол-во видов	7	8	?	20	5

Найдите по таблице,

а) сколько видов костюмов сто́ят от 7 до 10 тыс. руб.;

б) отношение количества самых дорогих костюмов (стоящих не меньше 13 тыс. рублей) к общему количеству костюмов;

в) процент костюмов ценой от 10 до 13 тыс. руб.

Ответ: ________________ .

6. Поквартальное исполнение сметы расходов предприятия на год представили в виде круговой диаграммы (см. рис. 126).

Какую сумму планируется израсходовать в 1-м квартале, если общий объём годовой сметы расходов составляет 1500 тыс. рублей?

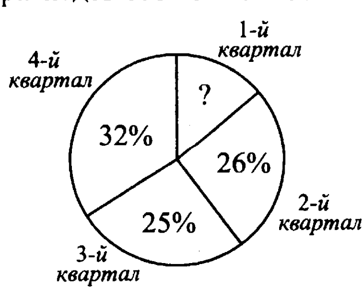


Рис. 126.

1) 170 тыс. рублей   2) 315 тыс. рублей
3) 375 тыс. рублей   4) 255 тыс. рублей

7. Компания «Аэрофлот» проанализировала ежегодные расходы, связанные с эксплуатацией самолётов двух типов — *А* и *Б*. На графике (см. рис. 127) показана зависимость ежегодной стоимости эксплуатации самолёта (y, млн руб.) от возраста (x, лет). Стоимость обслуживания какого вида самолётов была выше на момент конца 18-го года эксплуатации самолётов и на сколько? (Ответ выразите в млн рублей.)

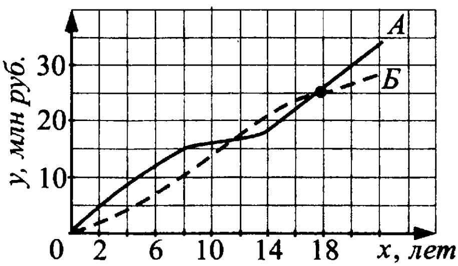


Рис. 127.

Ответ: ________________.

8. На графике (см. рис. 128) показано, как менялась температура воздуха в городе x и городе y в течение суток. В каком городе температура повысилась больше и на сколько градусов в период с 12 часов до 16 часов?

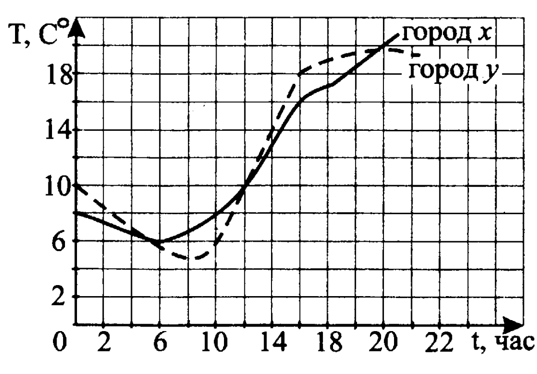


Рис. 128.

Ответ: ________________.

Вариант № 5

1. В таблице приведены результаты соревнований по прыжкам в высоту.

Страна	Россия	США	Китай	Англия	Франция	КНДР	ЮАР
Результат (м)	2,4	2,08	1,96	1,97	2,22	1,7	1,7

Представитель какой страны показал третий результат?

1) Китай 2) США 3) Англия 4) Франция

2. Автомобилист выезжает из одного города в другой. На рисунке 129 изображён график его движения (по вертикальной оси — расстояние до первого города).

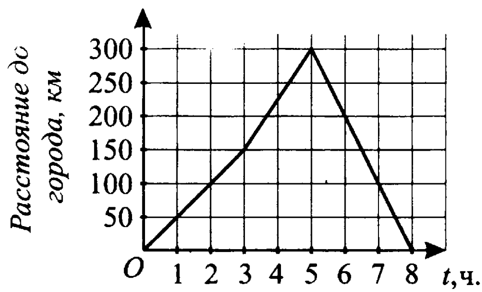


Рис. 129.

Определите, пользуясь графиком,

а) с какой скоростью он ехал первоначально;

б) через сколько часов после начала движения автомобилист понял, что заблудился, и поехал обратно;

в) с какой скоростью он возвращался к первому городу.

Ответ: ________________.

3. Количество слоек с разной начинкой в магазине представлено в виде круговой диаграммы (см. рис. 130). Сколько слоек с вишнёвой начинкой, если слоек с абрикосовой начинкой 15, а всего в магазине 200 слоек?

Ответ: ________________.

4. На складе имеется 250 упаковок с различными напитками (см. рис. 131). Найдите x.

Ответ: ________________.

5. После рыбалки отец и сын подсчитали свой улов и составили таблицу.

	карась	окунь	другая рыба
отец	8	7	1
сын	2	8	4

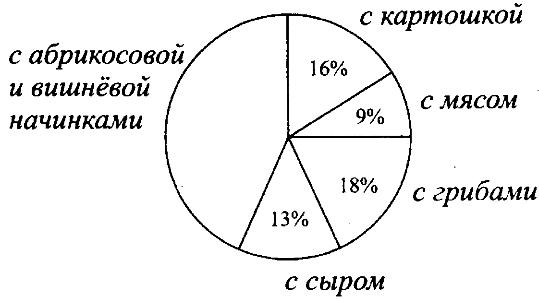


Рис. 130.

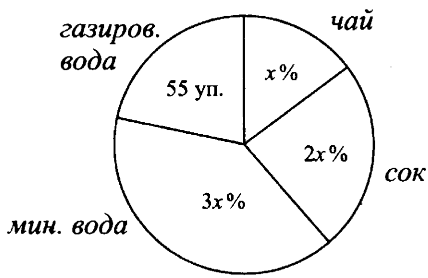


Рис. 131.

Определите по таблице,

а) сколько процентов составляет улов сына от улова отца;

б) какую часть составляют пойманные караси от общего улова;

в) отношение количества пойманных сыном окуней к количеству пойманных отцом карасей.

Ответ: ________________.

6. В саду 400 плодовых деревьев, состав которых представлен на круговой диаграмме (см. рис. 132). Сколько груш произрастает в саду?

Рис. 132.

1) 12 2) 40 3) 32 4) 240

7. Результаты анализа полученной предприятием прибыли за год представили в виде круговой диаграммы (см. рис. 133). Какая прибыль была получена предприятием во 2-м квартале, если за год прибыль составила 1200 тыс. рублей?

Рис. 133.

1) 276 тыс. рублей 2) 230 тыс. рублей
3) 288 тыс. рублей 4) 300 тыс. рублей

8. Из города выехал первый автомобилист. График его движения представлен на рисунке 134. Через два часа за ним выезжает второй автомобилист. С какой скоростью должен ехать второй автомобилист, чтобы догнать первого через четыре часа после своего выезда?

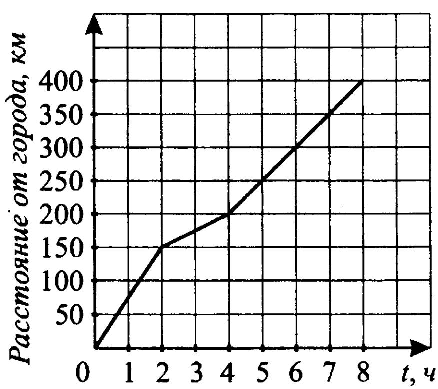


Рис. 134.

Ответ: ________________.

Вариант № 6

1. На рисунке 135 изображены графики зависимости от времени положения двух велосипедистов на протяжении гонки. На сколько километров больше проехал победитель гонки по сравнению с соперником с 60-й до 120-й минуты?

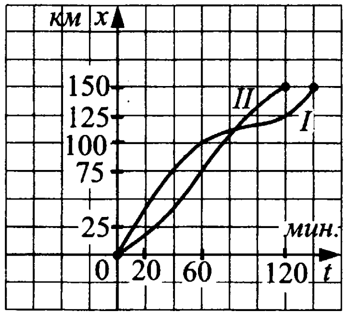


Рис. 135.

1) 75 км 2) 50 км 3) 25 км 4) 10 км

2. На рисунке 136 изображены графики движения автомобиля (график AB) и автобуса (график CD), вышедщих из одного и того же города в одном направлении. Определите, пользуясь графиком,

а) на каком расстоянии от города автомобиль догнал автобус;

б) через сколько часов после выхода автобуса произошла встреча;

в) на каком расстоянии друг от друга были автобус и автомобиль в 8 часов.

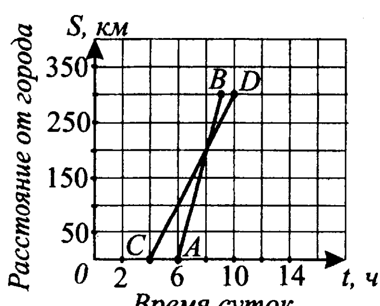


Рис. 136.

Ответ: ________________.

3. Автомобиль проехал от пункта B до пункта A и вернулся обратно. На рисунке 137 изображён график его движения: по горизонтальной оси откладывается время движения, по вертикальной — расстояние от пункта B до автомобиля.

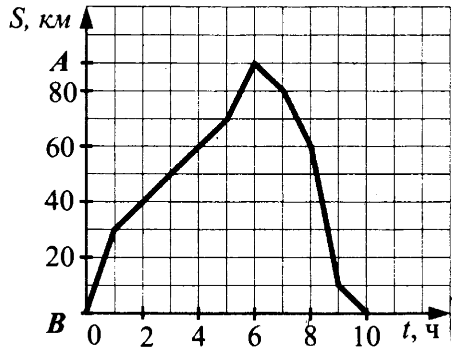


Рис. 137.

Какое общее расстояние автомобиль проехал с минимальной скоростью в пути от B к A и обратно?

1) 30 км 2) 40 км 3) 50 км 4) 60 км

4. Катер перевозил отдыхающих с одного берега озера на другой. На рисунке 138 изображён график движения катера во время четырёх рейсов.

Используя график, ответьте на вопрос: на каком по счёту рейсе катер шёл медленнее всего?

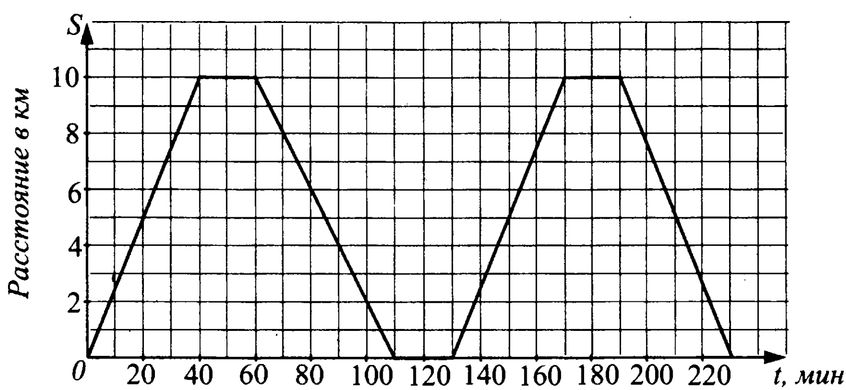


Рис. 138.

5. На диаграмме (см. рис. 139) показано количество деревьев, посаженных в парке в период с 1991 по 1995 годы. Определите, в какой из периодов посажено деревьев больше: 1991 – 1992 или 1993 – 1995.

Ответ: ________________.

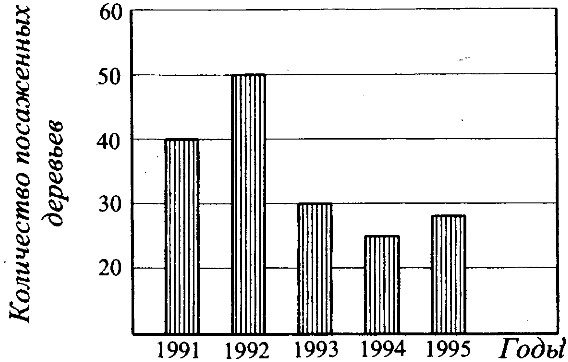


Рис. 139.

6. На плодово-овощной базе первые 5 дней бананы продают по 25 руб., далее — по 15 руб. Какой график (см. рис. 140, по оси Ox отмеряется время в сутках, по оси Oy — стоимость бананов в руб.) соответствует этим условиям?

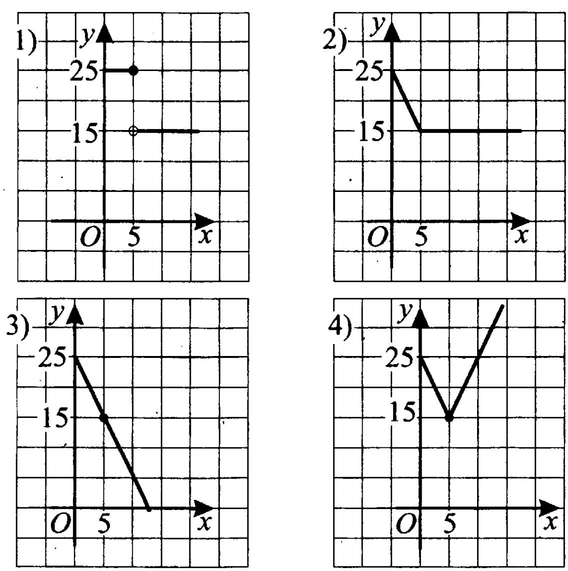


Рис. 140.

7. На рисунке 141 изображён график зависимости скорости v асфальтового катка от времени. Определите скорость катка через 4 часа после начала движения. Ответ дайте в км/ч.

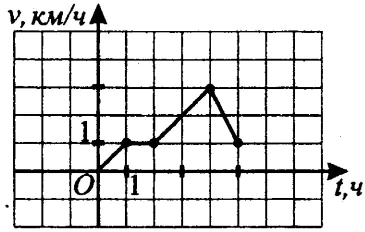


Рис. 141.

8. Некоторая компания решила проанализировать эффективность рекламы на товары двух видов: M и N. На графике (см. рис. 142) показана зависимость еженедельного объёма продаж от расходов на рекламу.

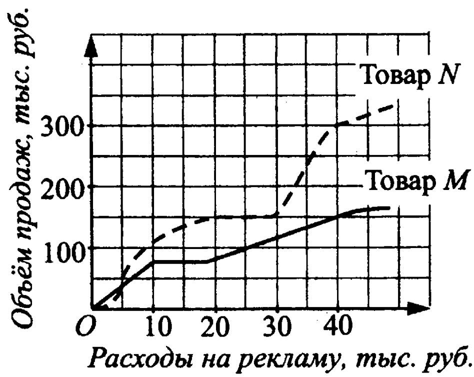


Рис. 142.

Объём продажи какого вида товара был больше и на сколько тысяч рублей, в тот момент когда расходы на рекламу составили 40 тыс. рублей?

Ответ: ________________.

§ 17. Составление математической модели по условию текстовой задачи

Основные сведения

Текстовые задачи условно можно разбить на следующие основные группы:

Задачи на движение. В задачах «на движение» обычно требуется найти либо скорость движения какого-либо объекта, либо время, за которое тот или иной объект проходит определённое расстояние, либо расстояние между некоторыми объектами, преодолевающими это расстояние при определённых условиях.

Такого рода задачи решаются, как правило, обозначением одного или нескольких неизвестных через переменную, а затем либо составляется уравнение (система уравнений) на основе данных задачи, либо проводится последовательность рассуждений, позволяющая получить из данных через некоторые промежуточные действия искомое значение.

Задачи на производительность («на работу»). В задачах на производительность основными данными обычно являются

1. Производительность нескольких объектов (например, комбайнёров, рабочих, учеников и пр.). Производительность каждого из объектов будем обозначать через $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Общую производительность объектов будем обозначать через P. Понятно, что $P = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$.

2. Время, затраченное на выполняемую работу каждым из объектов, — $t_1, t_2, \ldots, t_n$. В случае совместной работы общее время — T.

3. Объём работы, выполненной каждым из объектов: $w_1, w_2, \ldots, w_n$ и суммарный объём выполненной работы W. Тогда
$W = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$.

Суммарный объём W иногда принимают за единицу.

Перечисленные данные связаны между собой основным соотношением: $PT = W$ (аналог известной формулы из физики $vt = s$, где v — скорость, t — время, s — расстояние). Из этого соотношения, в зависимости от данных задачи, легко получить другие соотношения. Например, если данными являются общий объём выполненной работы, время, потраченное на эту работу, и производительность каждого из объектов, то имеет место соотношение

$$(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)T = W. \qquad (1)$$

Если известно, что один из объектов выполнил свой объём работы быстрее (медленнее), чем другой свой объём на время t, к примеру, первый объект закончил работу раньше второго, то приходим к соотношению

$$\frac{w_2}{p_2} - \frac{w_1}{p_1} = t. \qquad (3)$$

Аналогичным образом можно получить другие соотношения.

Задачи на проценты, концентрацию, части и доли.

Концентрация (c) данного вещества в смеси — это отношение количества чистого вещества m в смеси к общему количеству M смеси, если они измерены одной и той же единицей массы

$$c = \frac{m}{M}.$$

Учитывая, что $0 \leqslant m \leqslant M$, значение концентрации $0 \leqslant c \leqslant 1$. Если $c = 0$, то в рассматриваемой смеси «чистое вещество» отсутствует ($m = 0$). Если с $= 1$, то рассматриваемая смесь состоит из «чистого вещества» ($m = M$).

Процентным содержанием чистого вещества в смеси называют его долю, выраженную в процентном отношении: $c \cdot 100\%$. Иногда, говоря о концентрации, подразумевают процентное содержание чистого вещества в смеси.

Если сливают две смеси с массами m_1 и m_2 с концентрациями в них некоторого вещества c_1 и c_2 соответственно, то концентрация данного вещества в новой смеси равна

$$c = \frac{c_1 m_1 + c_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Масса данного вещества равна сумме масс данного вещества в отдельных смесях, т.е. $c_1 m_1 + c_2 m_2$.

Иногда, говоря о концентрации, вместо массы рассматривают объём.

Демонстрационный вариант

1. Прочитайте задачу. «Поверхность бассейна имеет форму прямоугольника со сторонами 18 м и 25 м. Вокруг бассейна идёт дорожка одной и той же ширины (см. рис. 143). Площадь, которую занимает поверхность бассейна с дорожкой, равна 638 м^2. Какова ширина дорожки?»

Пусть ширина дорожки x м. Какое уравнение соответствует условию задачи?

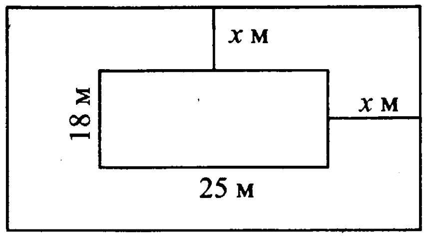


Рис. 143.

1) $(18+x)(25+x)=638$ 2) $2(18x+25x)+18\cdot 25=638$

3) $(18+2x)(25+2x)=638$ 4) $x(18+25)\cdot 2=638$

Решение. Если x м — ширина дорожки, то, согласно рисунку, длина площадки, которую занимает поверхность бассейна с дорожкой, равна $(25+2x)$ м, ширина — $(18+2x)$ м. Следовательно, площадь поверхности бассейна с дорожкой равна $(25+2x)(18+2x)$, что, согласно условию, составляет 638 м^2. Получаем уравнение: $(25+2x)(18+2x)=638$. Значит, из предложенных вариантов ответов уравнение 3) соответствует условию задачи.

Ответ: 3.

2. На три полки поставили 218 книг. На первую поставили на 13 книг больше, чем на вторую, а на третью полку — в 3 раза больше, чем на вторую. Сколько книг на второй полке? Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если x — количество книг на второй полке.

1) $5x+13=218$ 2) $5x-13=218$

3) $2x+13+\frac{x}{3}=218$ 4) $2x+13-\frac{x}{3}=218$

Решение. Пусть x — количество книг на второй полке, тогда на первой полке — $(x+13)$ книг, а на третьей — $3x$ книг. Всего на трёх полках 218 книг. Получаем уравнение $x+13+x+3x=218$. Отсюда, $5x+13=218$.

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

3. Прочитайте задачу: «В двух санаториях отдыхает 750 человек. В одном санатории отдыхающих было в 1,5 раза больше, чем в другом. Найдите число отдыхающих в каждом санатории».

Пусть a и b — количество отдыхающих в санаториях, причём $b>a$. Какая система уравнений удовлетворяет условию задачи?

1) $\begin{cases} a+b=750, \\ 2a=3b \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3a+2b=750, \\ 3b=2a \end{cases}$

3) $\begin{cases} a+b=750, \\ 3a=2b \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2a+3b=750, \\ 3a=2b \end{cases}$

Решение. Если a и b — количество отдыхающих в каждом из санаториев, то учитывая, что общая численность отдыхающих равна 750 человек, получаем $a+b=750$.

Так как по условию $b>a$ и в одном из санаториев в 1,5 раза больше отдыхающих, чем в другом, то $1{,}5a=b$, или $\frac{3}{2}a=b \Rightarrow 3a=2b$. Решение задачи сводится к решению системы уравнений $\begin{cases} a+b=750, \\ 3a=2b. \end{cases}$

Следовательно, из предложенных только система 3) удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 3.

4. Математик получил заказ составить 42 задачи за x дней. Если бы он составлял в день на 7 задач больше, то закончил бы работу на день раньше. Определите x. Какое из приведённых уравнений соответствует условию задачи?

1) $42x+7=42(x-1)$ 2) $\frac{42}{x-7}=\frac{42}{x-1}$

3) $\frac{42}{x}-7=\frac{42}{x-1}$ 4) $\frac{42}{x}+7=\frac{42}{x-1}$

Решение. По условию задачи математик получил заказ составить 42 задачи за x дней, то есть он должен был составлять $\frac{42}{x}$ задачи в день. Если бы он составлял в день на 7 задач больше, то закончил бы работу на день раньше, то есть составлял бы $\frac{42}{x-1}$ задачи в день. Учитывая эти условия, получаем уравнение $\frac{42}{x}+7=\frac{42}{x-1}$.

Следовательно, из предложенных ответов только уравнение 4) удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 4.

5. Из деревни в город выезжает мотоциклист и едет с постоянной скоростью 50 км/ч. Через 20 минут после мотоциклиста из деревни в город выезжает автомобиль и едет с постоянной скоростью 80 км/ч. Какова длина пути от деревни до города, если мотоциклист и автомобиль прибыли в город одновременно? Пусть S км — длина пути от деревни до города. Какое из данных уравнений соответствует условию задачи?

1) $\frac{S}{50}+20=\frac{S}{80}$ 2) $\frac{S}{50}=\frac{50}{80}+20$

3) $80S+0{,}2=50S$ 4) $\frac{S}{50}-\frac{S}{80}=\frac{1}{3}$

Решение. $\frac{S}{50}$ ч — время движения мотоцикла; $\frac{S}{80}$ ч — время движения автомобиля. По условию мотоцикл затратил на дорогу на 20 минут больше, чем автомобиль. 20 мин $=\frac{20}{60}$ ч $=\frac{1}{3}$ ч. Составим уравнение: $\frac{S}{50}-\frac{S}{80}=\frac{1}{3}$. Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

6. Один нагреватель нагревает воду в бассейне за 4 часа, второй — за 6 часов. За какое время нагреется вода в бассейне, если работают оба нагревателя?

Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если t — время (в часах), за которое нагреется вода при двух работающих нагревателях.

1) $t=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ 2) $\frac{1}{t}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ 3) $t=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}$ 4) $\frac{1}{t}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}$

Решение. Примем объём воды в бассейне за 1. За один час I нагреватель может нагреть $\frac{1}{4}$ часть воды, а II — $\frac{1}{6}$ часть воды. При двух работающих нагревателях за 1 час нагревается $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ часть воды, что составит $\frac{1}{t}$. Следовательно, $\frac{1}{t}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$. Из предложенных ответов только уравнение 2) соответствует условию задачи.

Ответ: 2.

7. В кувшине находится 2 л разбавленного яблочного сока, причём его концентрация равна 80%. Из кувшина вылили 0,5 л жидкости и влили столько же чистой воды. После этого вылили ещё 1 л получившейся жидкости и влили столько же разбавленного яблочного сока с концентрацией 75%. Какова концентрация сока в полученной смеси?

Решение. Концентрация 80% означает: $\frac{80}{100} = 0{,}8$. После первого действия чистого сока осталось $(2 - 0{,}5) \cdot 0{,}8 = 1{,}2$ (л). После того как вылили 1 л разбавленного сока (то есть половину), чистого сока в кувшине осталось $\frac{1{,}2}{2} = 0{,}6$ (л). Долив в кувшин 1 л сока с концентрацией 75%, добавили $1 \cdot 0{,}75 = 0{,}75$ (л) чистого сока. Значит, всего в двух литрах смеси $0{,}6 + 0{,}75 = 1{,}35$ (л) чистого сока. Концентрация смеси: $\frac{1{,}35}{2} \cdot 100\% = 67{,}5\%$ (см. «Основные сведения» к параграфу).

Ответ: 67,5%.

8. Дети посадили во дворе школы два дерева — ёлку и яблоню. Общая высота деревьев на момент посадки составляла 2,4 м. За каждый год яблоня вырастает на $\frac{2}{5}$ от первоначальной высоты ёлки. Какова была высота ёлки в день посадки, если известно, что через два года ёлка была в 1,2 раза ниже яблони и выросла на 0,35 м от первоначальной высоты яблони?

Решение. Пусть x м — высота ёлки, y м — высота яблони на момент посадки. Тогда, согласно условию, $x + y = 2{,}4$. Через два года после посадки высота яблони составила $y + 2 \cdot \frac{2}{5}x$, а высота ёлки через два года составила $y + 0{,}35$. Так как через два года ёлка была в 1,2 раза ниже яблони, то получаем $y + \frac{4}{5}x = (y + 0{,}35) \cdot 1{,}2$.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} y + \frac{4}{5}x = (y + 0{,}35) \cdot 1{,}2, \\ x + y = 2{,}4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2{,}4 - y, \\ y + \frac{4}{5}(2{,}4 - y) = (y + 0{,}35) \cdot 1{,}2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2{,}4 - y, \\ y - 0{,}8y - 1{,}2y = 0{,}42 - 1{,}92; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2{,}4 - y, \\ y = 1{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}9, \\ y = 1{,}5. \end{cases}$$

Ответ: 0,9.

Вариант № 1

1. Прочитайте задачу. «Клумба имеет форму круга диаметром 8 м. Вокруг клумбы проложена дорожка одной и той же ширины (см. рис. 144). Площадь, которую занимает клумба с дорожкой, равна 36π м^2. Какова ширина дорожки?»

Пусть ширина дорожки x м. Какое уравнение соответствует условию задачи?

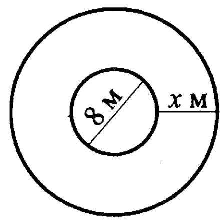


Рис. 144.

1) $\pi(8+x)^2 = 36\pi$ 2) $\pi(8+2x)^2 = 36\pi$

3) $\dfrac{(8+x)^2\pi}{4} = 36\pi$ 4) $\pi(4+x)^2 = 36\pi$

2. На первой полке книг в 3 раза больше, чем на второй, и на 15 книг меньше, чем на третьей. Сколько книг на первой полке, если на трёх полках 120 книг?

Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если через x обозначено количество книг на первой полке.

1) $3x + 15 = 120 - x$ 2) $x + \dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{3} + 15 = 120$

3) $\dfrac{7}{3}x - 15 = 120$ 4) $\dfrac{7}{3}x + 15 = 120$

3. Из двух пунктов, расстояние между которыми 45 км, одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого велосипедиста на 3 км/ч больше скорости второго велосипедиста. Определите скорость первого велосипедиста, если они встретились через 1 ч 30 мин после их выезда.

Обозначив через x скорость первого велосипедиста (в км/ч), выберите уравнение, соответствующее условию задачи.

1) $2x - 3 = 30$ 2) $2x + 3 = 30$

3) $1{,}5(x + (x+3)) = 30$ 4) $1{,}5(x + (x+3)) = 45$

4. Расстояние между пристанями 30 км. Лодка проплыла от одной пристани до другой и вернулась обратно, затратив на весь путь 6 часов. Какова собственная скорость лодки, если скорость течения реки 2 км/ч?

Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если за x обозначена собственная скорость лодки (в км/ч).

1) $\frac{30}{x-2} - \frac{30}{x+2} = 6$ 2) $\frac{5}{x+2} + \frac{5}{x-2} = 6$

3) $\frac{5}{x+2} + \frac{5}{x-2} = 1$ 4) $30(x+2) - 30(x-2) = 6$

5. Расстояние от посёлка до станции автобус проходит за 3 часа, а автомобиль — за 2 часа. Чему равно расстояние от посёлка до станции, если скорость автомобиля на 35 км/ч больше скорости автобуса?

Укажите уравнение, соответствующее условию задачи, если через x обозначено расстояние (в км) от посёлка до станции.

1) $3x - 2x = 35$ 2) $35\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{3}\right) = 1$

3) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 35$ 4) $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} = 35$

6. В парке посадили одинаковыми рядами 40 кустов роз. Кустов в каждом ряду оказалось на 6 больше, чем рядов. Сколько кустов в каждом ряду и сколько рядов в парке?

Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если за x принять число посаженных рядов.

1) $\frac{40}{x} = x + 6$ 2) $40(x+6) = x$

3) $40x = 7 + x$ 4) $x^2 - 40x - 200 = 0$

7. При консервировании фруктов банок с абрикосовым компотом было закупорено на 10% больше, чем банок с вишнёвым компотом. Причем с вишнёвым компотом трёхлитровых банок было закупорено на 25% больше, а литровых — на 15% меньше, чем с абрикосовым компотом. Сколько процентов составляют трёхлитровые банки с абрикосовым компотом от всех закупоренных с этим компотом банок? (Ответ округлите до целого числа.)

Ответ: ________________.

8. На промежутке 24 м переднее колесо трактора делает на 4 оборота больше заднего. Если длину окружности переднего колеса увеличить на 6 дм, то на том же промежутке переднее колесо сделает на 2 оборота больше заднего. Найдите в метрах длину окружности заднего колеса трактора.

Ответ: ________________.

Вариант № 2

1. Прочитайте задачу. «Из прямоугольного треугольника (с катетами, бо́льшими двух), имеющего площадь, равную 6, вырезали квадрат, как показано на рисунке 145. После этого площадь оставшейся фигуры составила 5. Найдите длину стороны квадрата».

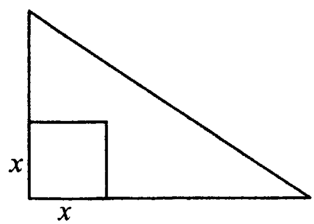


Рис. 145.

Пусть длина стороны вырезанного квадрата равна x. Какое уравнение соответствует условию задачи?

1) $5x^2 = 6$ 2) $6x^2 = 5$ 3) $6 - x^2 = 5$ 4) $6 + x^2 = 5$

2. Если задуманное число увеличить на 23 и результат разделить на 10, получится 7. Найдите это число.

Укажите уравнение, соответствующее условию задачи, если x — задуманное число.

1) $(x - 23) \cdot 10 = 7$ 2) $10 \cdot (x + 23) = 7$

3) $(x + 23) : 10 = 7$ 4) $10 : (x + 23) = 7$

3. Учебник по математике на 20 руб. дешевле учебника истории. Было куплено 2 учебника истории и 5 учебников математики на 600 руб.

Пусть x руб. — стоимость учебника истории, y руб. — стоимость учебника математики. Выберите систему уравнений, соответствующую условию задачи.

1) $\begin{cases} y - x = 20 \\ 2x + 5y = 600 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - x = 20 \\ 5x + 2y = 600 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 20 \\ 2x + 5y = 600 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - y = 20 \\ 5x + 2y = 600 \end{cases}$

4. На покупку стиральной машины Сергей потратил 60% своих сбережений, а оставшуюся сумму он решил разделить поровну на подарки жене, сыну и дочери. Сколько решил потратить Сергей на подарок каждому члену своей семьи, если у него было 18 000 рублей?

Ответ: ________________.

5. Прочитайте условие задачи. «Из алюминиевого прямоугольника площадью 120 см^2 сделали коробку без крышки, вырезав по углам одинаковые квадраты и загнув края вверх (см. рис. 146). Чему должны быть равны стороны вырезанного квадрата, если размеры дна коробки 6 см и 4 см?»

Пусть стороны вырезанного квадрата равны x см. Какое уравнение соответствует условию задачи?

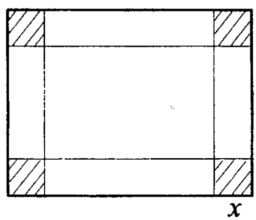


Рис. 146.

1) $(6+x)(4+x)=120$ 2) $(6-2x)(4-2x)=120$

3) $(6+2x)(4+2x)=120$ 4) $6\cdot 4+4x^2=120$

6. Если номер Васиной квартиры умножить на 4, а затем к результату прибавить 11, то получится 227. Определите номер квартиры, в которой живёт Вася.

Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, обозначив номер Васиной квартиры за x.

1) $4x+11=227$ 2) $4(x+11)=227$

3) $x+4\cdot 11=227$ 4) другой ответ

7. Имеются два сплава, в первом из которых содержится 40%, а во втором — 20% серебра. Сколько килограммов второго сплава необходимо добавить к 20 кг первого сплава, чтобы получить сплав, содержащий 30% серебра?

Ответ: ________________.

8. Первый кран разгрузит баржу за 3 часа, второй кран разгрузит сухогруз за 8 часов. Во сколько раз производительность первого крана больше производительности второго, если первый кран разгрузит сухогруз на 10 часов быстрее, чем второй кран — баржу?

Ответ: ________________ .

Вариант № 3

1. Прочитайте задачу. «Из прямоугольного треугольника (с катетами, бо́льшими 4,5), имеющего площадь, равную 12, вырезали квадрат, две стороны которого лежат на катетах. После этого площадь оставшейся фигуры составила 8. Найдите сторону вырезанного квадрата».

Пусть длина стороны квадрата равна x. Какое уравнение соответствует условию задачи?

1) $(x-8)(x-12)=20{,}25$ 2) $(x-12)(x-8)=0$

3) $x^2=12-8$ 4) $x^2=12+8$

2. Два зайца съедают определённое количество моркови за три дня. На сколько дней хватит моркови первому зайцу, если второй съедает это количество моркови на 1 день быстрее, чем первый?

Пусть первому зайцу хватит моркови на x дней, тогда можно составить уравнение, соответствующее условию задачи:

1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=\frac{1}{3}$ 2) $\frac{x}{x+3}=\frac{1}{3}$

3) $x+(x+3)=1$ 4) $x+(x-1)=3$

3. Прочитайте условие задачи. «Прямоугольный участок земли обнесён забором, периметр которого 80 м. Площадь участка 231 м^2. Найдите длины сторон участка».

Если ширину участка обозначить x м, а его длину — y м, то какую систему уравнений можно составить по условию задачи?

1) $\begin{cases} x+y=80, \\ xy=231 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=40, \\ xy=231 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{231}{x}=y, \\ \frac{231}{x}+y=80 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2(x+y)=231, \\ xy=80 \end{cases}$

4. Два отряда ныряльщиков добывали жемчуг. Каждый человек из первого отряда достал 7 жемчужин, а каждый человек из второго отряда достал 3 жемчужины. Всего была добыта 61 жемчужина.

Сколько ныряльщиков в двух отрядах, если в первом отряде их количество на 3 больше, чем во втором?

Ответ: ________________.

5. Длина прямоугольника на 5 см больше его ширины. Найдите длину прямоугольника, если при её уменьшении на 1 см и увеличении ширины на 2 см площадь прямоугольника стала 48 см^2.

Какое уравнение соответствует условию задачи, если x см — длина прямоугольника?

1) $(x+1)(x-2)=48$ 2) $(x-1)(x-3)=48$
3) $(x-1)(x+7)=48$ 4) $(x+5)(x-3)=48$

6. Сторона первого квадрата на 5 см меньше стороны второго, а площадь первого — на 65 см^2 меньше площади второго. Найдите периметры этих квадратов.

Ответ: ________________.

7. Два насоса, работая вместе, могут наполнить бассейн за 48 минут. За сколько минут может наполнить бассейн первый насос, работая один, если второму на эту работу нужно на 20 минут больше?

Пусть первый насос может один наполнить бассейн за x минут, тогда можно составить уравнение, соответствующее условию задачи:

1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{48}=\dfrac{1}{x+20}$ 2) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+20}=\dfrac{1}{48}$

3) $(20+x)+x=48$ 4) $\dfrac{1}{x+20}=\dfrac{1}{48}$

8. Из пункта A в пункт B выехал автомобиль, а навстречу ему из пункта B одновременно с автомобилем выехал автобус. Через некоторое время они встретились, а потом продолжили путь. Автобус через 16 часов после встречи приехал в пункт A, а автомобиль через 4 часа после встречи в пункт B. Сколько времени (в ч) провёл в пути автобус?

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. Прочитайте задачу. «В центре газона прямоугольной формы длиной 20 м и шириной 15 м находится прямоугольный бассейн, длина и ширина которого пропорциональны длине и ширине газона. Площадь газона составляет 192 м^2. Определите длину бассейна».

Пусть длина бассейна (в метрах) равна $4x$ (см. рис. 147). Какое уравнение соответствует условию задачи?

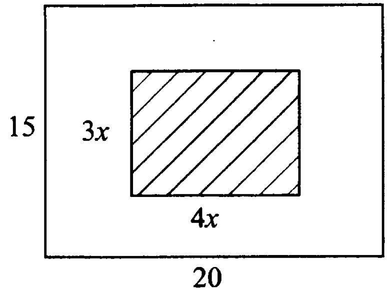


Рис. 147.

1) $300 \cdot 192 = 4x + 3x$ 2) $300 = 12x^2 + 192$

3) $(20 - 4x)(15 - 3x) = 192$ 4) $\dfrac{300 - 192}{300} = \dfrac{4x + 3x}{35}$

2. На первой полке книг в 2 раза меньше, чем на второй, и на 5 книг больше, чем на третьей. Сколько книг на первой полке, если на всех трёх полках 55 книг?

Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если за x обозначено количество книг на первой полке.

1) $5x - 5 = 55$ 2) $x + 2x + x - 5 = 55$

3) $3x - 5 = 55$ 4) $x + 2x - x + 5 = 55$

3. Из двух пунктов, расстояние между которыми 99 км, одновременно навстречу друг другу выехали два мотоциклиста. Второй ехал со скоростью на 6 км/ч больше скорости первого мотоциклиста. Определите скорость первого мотоциклиста, если их встреча произошла через 1 ч 6 мин после выезда обоих мотоциклистов.

Обозначив через x скорость первого мотоциклиста (в км/ч), выберите уравнение, соответствующее условию задачи.

1) $2x + 6 = 99$ 2) $1{,}06(2x + 6) = 99$

3) $2x + 6 = 9{,}9$ 4) $1{,}1(x + x + 6) = 99$

4. Лодка проплыла 6 км по течению реки и 8 км против течения, затратив на весь путь 4 ч 45 мин. Какова собственная скорость лодки, если скорость течения реки равна 3 км/ч?

Обозначив через x собственную скорость лодки (в км/ч), выберите уравнение, соответствующее условию задачи.

1) $\dfrac{14}{x} = 4\dfrac{3}{4}$ 2) $\dfrac{6}{x + 3} - \dfrac{8}{x - 3} = 4$

3) $\dfrac{8}{x + 3} + \dfrac{6}{x - 3} = 4{,}75$ 4) $\dfrac{6}{x + 3} + \dfrac{8}{x - 3} = 4{,}75$

5. Некоторое расстояние автобус проходит за 4 ч, а автомобиль — за 3 ч. Чему равно это расстояние, если скорость автомобиля на 12 км/ч больше скорости автобуса?

Укажите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой x обозначено искомое расстояние (в км).

1) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 12$ 2) $\frac{x}{4} - \frac{x}{3} = 12$

3) $4x - 3x = 12$ 4) $12\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{4}\right) = 1$

6. В сквере посадили одинаковыми рядами 88 кустов пионов. Кустов в каждом ряду оказалось на 3 меньше, чем рядов. Сколько кустов пионов в каждом ряду?

Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой x обозначено количество кустов пионов в каждом ряду.

1) $88 = x(x+3)$ 2) $\frac{x}{88} = x - 3$

3) $88x = x - 3$ 4) $x^2 + 3x - 264 = 0$

7. Первая машинистка набирает 9 листов текста на компьютере за 40 мин, а вторая — 8 листов за это же время. Сколько минут потребуется им обеим, чтобы набрать 340 листов текста?

Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой x обозначено количество минут, необходимое для набора 340 листов.

1) $\frac{9}{x+40} + \frac{8}{x+40} = 340$ 2) $17(x - 40) = 340$

3) $\frac{40}{x+9} + \frac{40}{x+8} = 340$ 4) $\frac{340 \cdot 40}{17} = x$

8. Расстояние между пристанями на реке 12 км. Катер проплыл от одной пристани до другой и вернулся обратно, затратив на весь путь 2 ч 30 мин. Какова скорость течения реки (в км/ч), если собственная скорость катера равна 10 км/ч?

Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой x обозначена скорость течения реки (в км/ч).

1) $\frac{2{,}5}{10+x} + \frac{2{,}5}{10-x} = 12$ 2) $x = \frac{2{,}5 \cdot 12}{10}$

3) $\frac{12}{10+x} + \frac{12}{10-x} = \frac{5}{2}$ 4) $\frac{12}{2 \cdot 2{,}5} = x$

Вариант № 5

1. Прочитайте задачу. «Вдоль аллеи расположены квадратные клумбы с цветами, как показано на рисунке. Длина аллеи равна 50 м, ширина — 14 м, общая площадь тротуарной плитки составляет 444 м^2. Чему равна сторона клумбы?»

Пусть x м — сторона клумбы (см. рис. 148). Какое уравнение соответствует условию задачи?

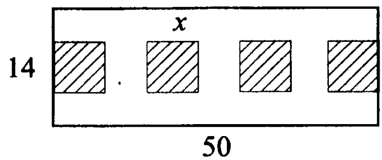


Рис. 148.

1) $4x^2 + 444 = 700$　　2) $(4x)^2 + 444 = 700$
3) $4x + 444 = 700$　　4) $x^2 + 444 = 700$

2. После проведения контрольной работы учитель сказал: «Пятёрок на 4 меньше, чем троек; четвёрок в 5 раз больше, чем двоек, а двоек в 5,5 раза меньше, чем троек». Сколько учеников получили двойки, если всего в классе 30 учеников?

Пусть x — количество двоек, тогда можно составить уравнение:

1) $x + 5{,}5x + 5x + (x + 4) = 30$
2) $x + \dfrac{x}{5{,}5} + 5x + (x - 4) = 30$
3) $x + 5{,}5x + 5x + (5{,}5x + 4) = 30$
4) $x + 5{,}5x + 5x + (5{,}5x - 4) = 30$

3. Бабушка и внучка в течение $\frac{1}{2}$ часа слепили 120 пельменей. Сколько пельменей в минуту лепит бабушка, если она лепит в минуту на 2 пельменя больше внучки?

Пусть бабушка лепит x пельменей в минуту, тогда можно составить уравнение:

1) $x + (x - 2) = 120$　　2) $\frac{1}{2}(x + (x - 2)) = 120$
3) $(x + (x + 2)) \cdot 30 = 120$　　4) $(x + (x - 2)) \cdot 30 = 120$

4. Катер проплыл по течению реки 6 км и 8 км против течения, затратив на весь путь время, необходимое на прохождение 15 км по озеру. Определите собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

Пусть v км/ч — собственная скорость катера, тогда можно составить уравнение:

1) $\frac{6}{v-2} + \frac{8}{v+2} = \frac{15}{v}$

2) $\frac{6}{v+2} + \frac{8}{v-2} = \frac{15}{v}$

3) $\frac{6}{v+2} + \frac{8}{v-2} = \frac{15}{2v}$

4) $6(v+2) + 8(v-2) = 15(v+2)(v-2)$

5. Из школы вышел ученик и пошёл домой со скоростью 3 км/ч, а через час по той же дороге в том же направлении на велосипеде выехал его брат со скоростью 16 км/ч. На каком расстоянии от школы братья встретятся?

Пусть братья встретятся на расстоянии x км от школы, тогда можно составить уравнение, соответствующее условию задачи:

1) $\frac{x}{3} = \frac{x}{16} + 1$ 2) $\frac{x}{3} = \frac{x}{16} - 1$

3) $3x = 16x - 1$ 4) $\frac{x}{3} + \frac{x}{16} = 1$

6. Мастер получил премию, равную 0,35 своего оклада, а его ученик — 0,25 своего оклада, причём премия мастера оказалась на 1500 рублей больше премии ученика. Какой оклад у ученика, если он на 2500 рублей меньше оклада мастера?

Обозначив за x рублей оклад ученика, можно составить уравнение:

1) $0{,}35(x + 2500) + 0{,}25x = 1500$

2) $0{,}35(x + 1500) - 0{,}25x = 2500$

3) $0{,}35(x + 2500) - 0{,}25x = 1500$

4) $0{,}35x - 0{,}25(x - 2500) = 1500$

7. На складе имеется несколько мешков с яблоками и несколько ящиков с грушами. Мешков на 10 больше, чем груш в одном ящике, ящиков на 5 меньше, чем яблок в одном мешке, а яблок в мешке на 7 меньше, чем всего мешков. Сколько груш в каждом ящике, если всего груш на 120 меньше, чем яблок?

Обозначив за x количество груш в одном ящике, можно составить уравнение:

1) $(x + 3)(x + 10) - x(x + 5) = 120$

2) $(x+3)(x+10)-x(x-2)=120$
3) $(x+10)(x-2)-x(x+3)=120$
4) $x(x+10)-(x+3)(x-2)=120$

8. Имеющийся у Винни-Пуха запас мёда он съест за 10 дней. Если он будет есть на две порции в день больше, то он опустошит свой запас за 8 дней. Запас из скольких порций имеется у Винни-Пуха?

Пусть x порций — запас Винни, тогда можно составить уравнение:

1) $10x=8(x+2)$ 2) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}=2$

3) $\frac{x}{10}-\frac{x}{8}=2$ 4) $\frac{x}{10}=\frac{x}{8}-2$

Вариант № 6

1. Объём параллелепипеда в 3 раза меньше объёма куба, а объём куба на 8 см^3 меньше объёма шара. Найдите объём шара (в см^3), если объём всех трёх фигур равен 15 см^3.

Ответ: ________________.

2. Саша прочитал книгу за 5 дней, а Илья эту же книгу прочитал за 7 дней. Сколько страниц в один день читал Илья, если Саша читал в один день на 12 страниц больше, чем Илья?

Обозначив за x число страниц, которые читал в один день Илья, можно составить уравнение:

1) $7(x+12)=5x$ 2) $7x-5x=12$
3) $5x+7x=12$ 4) $7x=5(x+12)$

3. Прочитайте задачу. «В корзине лежало 3 арбуза и 10 дынь. Известно, что арбуз весит на 4 кг больше дыни. Сколько весит арбуз и сколько весит дыня, если вся корзина весит 38 кг (без учёта веса самой корзины)?»

Пусть x кг — вес арбуза, y кг — вес дыни. Выберите систему уравнений, соответствующую условию задачи.

1) $\begin{cases} x-y=4, \\ 3y+10x=38 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y-x=4, \\ 3x+10y=38 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y-x=4, \\ 3y+10x=38 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-y=4, \\ 3x+10y=38 \end{cases}$

4. Вася выше Пети на 10 см, а Петя ниже Коли в 1,2 раза. Какой рост у Васи (в см), если он ниже Коли на 18 см ?

Ответ: ________________.

5. Прочитайте условие задачи. «На земельном участке, который имеет форму прямоугольника с размерами 37 м и 27 м, вдоль двух коротких сторон и одной длинной выкладывают из тротуарной плитки три дорожки одинаковой ширины (см. рис. 149). Какова должна быть ширина дорожек, чтобы не покрытая плиткой земля участка имела площадь 860 м^2?»

Какое уравнение соответствует условию задачи, если x — ширина дорожек (в метрах)?

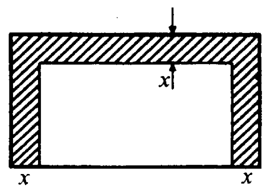


Рис. 149.

1) $37 \cdot 27 - 2 \cdot 27 \cdot x - 37 \cdot x = 860$
2) $37 \cdot 27 - 27 \cdot x - 37 \cdot x = 860$
3) $(37 - 2x)(27 - x) = 860$
4) $(37 - x) \cdot (27 - 2x) = 860$

6. Мастер за час делает на 5 деталей больше, чем ученик. После того, как ученик проработал 8 часов, а мастер — 10, они изготовили 410 деталей. Сколько деталей в час делает мастер и сколько ученик?

Ответ: ________________.

7. Расстояние между пунктами A и B по реке равно 2 км. На путь из A в B и обратно моторная лодка затратила $\frac{11}{30}$ часа. Какова собственная скорость лодки, если скорость течения реки равна 1 км/ч?

Обозначив собственную скорость лодки за x км/ч, можно составить уравнение:

1) $2(x-1) + 2(x+1) = \frac{11}{30}$
2) $\frac{x+1}{2} + \frac{x-1}{2} = \frac{11}{30}$
3) $\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{11}{30}$
4) $\frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{11}{30}$

8. Трое рабочих выполняют некоторую работу. Если бы работали только первый и второй рабочие или только первый и третий рабочие, то работа была бы выполнена за три дня. Если бы работали только второй и третий рабочие, то работа была бы выполнена за шесть дней. За сколько дней рабочие выполнят всю работу, если будут трудиться втроём?

Ответ: ________________.

§ 18. Текстовые задачи

Демонстрационный вариант

1. Площадь прямоугольного треугольника равна 27 см^2, а один из катетов на 3 см больше другого. Найдите длину большего катета (в см).

Решение. Пусть x см — длина большего катета, тогда $(x-3)$ см — длина меньшего катета, а $\frac{1}{2}x(x-3)$ см^2 — площадь треугольника.

По условию задачи площадь треугольника равна 27 см^2. Составим уравнение: $\frac{1}{2}x(x-3)=27$, $x^2-3x-54=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=9, \\ x=-6. \end{array}\right.$

Учитывая, что длина катета — положительное число, условию задачи удовлетворяет $x=9$. Длина большего катета 9 см.

Ответ: 9.

2. В каждом из двух бидонов было одинаковое количество молока. После того как из первого бидона во второй перелили 20 л молока, в нём осталось втрое меньше молока, чем стало во втором бидоне. Сколько литров молока было в каждом бидоне первоначально?

Решение. Пусть первоначально в каждом бидоне было x л молока. После того как молоко перелили из первого бидона во второй, в первом бидоне осталось $(x-20)$ л молока, а во втором стало $(x+20)$ л. Зная, что в первом бидоне осталось молока в 3 раза меньше, чем стало во втором, составим уравнение:

$3(x-20)=x+20$, $3x-x=20+60$, $x=40$.

Первоначально в каждом бидоне было по 40 л молока.

Ответ: 40.

3. С трёх грядок собрали 160 кг огурцов. С первой грядки собрали в 3 раза больше, чем со второй, а с третьей — на 54 кг больше, чем со второй. Сколько килограммов огурцов собрали с первой грядки?

Решение. Пусть со второй грядки собрали x кг огурцов.
Тогда $3x$ кг собрали с первой грядки, а $(x+54)$ кг собрали с третьей грядки. По условию задачи с трёх грядок собрали 160 кг.
Составим уравнение:

$3x+x+x+54=160$, $5x=106$, $x=21{,}2$.

21,2 кг огурцов собрали со второй грядки; $21{,}2\cdot 3=63{,}6$ кг — собрали с первой грядки.

Ответ: 63,6.

4. Разность двух натуральных чисел равна 1. Сумма этих чисел меньше их произведения на 19. Найдите эти числа.

Решение. Пусть x — первое число, y — второе число. Тогда $x-y$ — разность чисел, $x+y$ — сумма, xy — произведение.

Зная, что разность чисел равна 1, а их произведение больше суммы на 19, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x-y=1, \\ xy-(x+y)=19; \end{cases} \quad \begin{cases} y=x-1, \\ x(x-1)-(x+x-1)=19; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x-1, \\ x^2-3x-18=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x-1, \\ \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=6. \end{array}\right. \end{cases}$$

По условию числа натуральные, значит, $x=6$, $y=5$.

Ответ: 6; 5.

5. Две гири и три гантели вместе весили 47 кг, а три гири тяжелее 6 гантелей на 18 кг. Сколько килограммов весит гиря и сколько — гантель?

Решение. Пусть x кг весит гиря ($x>0$), y кг весит гантель ($y>0$). Тогда $2x$ кг весят 2 гири, $3y$ кг весят 3 гантели; $(2x+3y)$ кг весят 2 гири и 3 гантели, что по условию задачи составляет 47 кг.

Следовательно, 1-е уравнение: $2x+3y=47$.

Так как $3x$ кг весят 3 гири, $6y$ кг весят 6 гантелей, то $(3x-6y)$ кг — разность веса трёх гирь и шести гантелей, что по условию задачи составляет 18 кг.

Следовательно, 2-е уравнение: $3x-6y=18$, или $x-2y=6$.

Решение задачи сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x+3y=47, \\ x-2y=6; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+3y=47, \\ -2x+4y=-12; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+3y=47, \\ 7y=35; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+3y=47, \\ y=5; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+3\cdot 5=47, \\ y=5; \end{cases} \quad \begin{cases} x=16, \\ y=5. \end{cases}$$

16 кг весит гиря, 5 кг — гантель.

Ответ: 16; 5.

6. Моторная лодка прошла по течению реки 12 км, а против течения — 7 км, затратив на путь по течению на 1 час меньше, чем путь против течения. Найдите скорость течения реки (в км/ч), если собственная скорость лодки 6 км/ч.

Решение. Пусть x км/ч — скорость течения реки, $x \in (0; 6)$.

	v (км/ч)	t (ч)	S (км)
по течению	$6+x$	$\dfrac{12}{6+x}$	12
против течения	$6-x$	$\dfrac{7}{6-x}$	7

По условию задачи на путь по течению лодка затратила на 1 ч меньше, чем на путь против течения. Составим уравнение:

$$\frac{7}{6-x}-\frac{12}{6+x}=1,\quad 7x+42-72+12x=36-x^2,\quad x^2+19x-66=0,$$

$$\left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-22. \end{array}\right.$$

$x=-22$ не удовлетворяет условию, $x\in(0;6)$.

Скорость течения реки — 3 км/ч.

Ответ: 3.

7. Расстояние в 30 км один из двух лыжников прошёл на 20 минут быстрее другого. Какова скорость каждого лыжника (в км/ч), если известно, что расстояние в 45 км первый лыжник проходит за то же время, за которое второй лыжник проходит 54 км?

Решение. Пусть x км/ч — скорость первого лыжника ($x>0$), y км/ч — скорость второго ($y>0$). Тогда 30 км первый лыжник прошёл за $\frac{30}{x}$ ч, а второй — за $\frac{30}{y}$ ч. Первый лыжник прошёл это расстояние на $\left(\frac{30}{x}-\frac{30}{y}\right)$ ч быстрее, чем второй, что по условию задачи составляет $20\text{ мин}=\frac{20}{60}\text{ ч}=\frac{1}{3}\text{ ч}$.

Следовательно, первое уравнение: $\dfrac{30}{x}-\dfrac{30}{y}=\dfrac{1}{3}$.

Расстояние в 45 км первый лыжник проходит за $\frac{45}{x}$ ч, а второй лыжник 54 км проходит за $\frac{54}{y}$ ч. По условию задачи лыжники прошли эти расстояния за одно и то же время.

Следовательно, второе уравнение: $\dfrac{45}{x}=\dfrac{54}{y}$, или $\dfrac{5}{x}=\dfrac{6}{y}$.

Решение задачи сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{30}{x} - \dfrac{30}{y} = \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{5}{x} = \dfrac{6}{y}; \end{cases} \quad \begin{cases} 90y - 90x = xy, \\ y = 1{,}2x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 90 \cdot 1{,}2x - 90x = 1{,}2x^2, \\ y = 1{,}2x; \end{cases} \quad \begin{cases} 1{,}2x^2 - 18x = 0, \\ y = 1{,}2x; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 15, \end{array} \right. \\ y = 1{,}2x. \end{cases}$$

$x = 0$ не удовлетворяет условию $x > 0$, значит,
$x = 15$, $y = 15 \cdot 1{,}2 = 18$. Скорость первого лыжника 15 км/ч, скорость второго — 18 км/ч.

Ответ: 15; 18.

8. Двое рабочих вместе выполнили всю работу за 5 дней. Если бы первый рабочий работал вдвое быстрее, а второй — вдвое медленнее, то всю работу они выполнили бы за 4 дня. За сколько дней может выполнить всю работу первый рабочий, трудясь самостоятельно?

Решение. Примем объём работы за единицу. Пусть за x дней выполнит всю работу первый рабочий ($x > 0$), за y дней — второй ($y > 0$).

$\dfrac{1}{x}$ — производительность первого рабочего,

$\dfrac{1}{y}$ — производительность второго рабочего,

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ — производительность двух рабочих вместе.

По условию рабочие вместе выполняют всю работу за 5 дней, значит, общая производительность — $\dfrac{1}{5}$.

Следовательно, первое уравнение: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5}$.

$\dfrac{2}{x}$ — увеличенная вдвое производительность первого рабочего,

$\dfrac{1}{2y}$ — уменьшенная вдвое производительность второго рабочего,

$\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{2y}$ — изменённая производительность двух рабочих вместе.

По условию рабочие вместе выполнили бы всю работу за 4 дня, значит, $\dfrac{1}{4}$ — была бы их общая производительность.

Следовательно, второе уравнение: $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{2y}=\dfrac{1}{4}$.

Решение задачи сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5},\\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{2y}=\dfrac{1}{4};\end{cases}\quad \begin{cases}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{y}=-\dfrac{2}{5},\\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{2y}=\dfrac{1}{4};\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5},\\ -\dfrac{3}{2y}=-\dfrac{3}{20};\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5},\\ y=10;\end{cases}\quad \begin{cases}x=10,\\ y=10.\end{cases}$$

Первый рабочий может выполнить всю работу за 10 дней.

Ответ: 10.

Вариант № 1

1. Из корзины взяли 9 яблок, затем треть остатка и ещё 10% всех яблок. После этого в корзине осталась половина первоначального числа яблок. Сколько яблок было в корзине?

Ответ: ________________.

2. Средний рост девочек того же возраста, что и Тома, равен 150 см. Рост Томы на 8% больше среднего. Какой рост у Томы?

1) 138 2) 139 3) 162 4) 163

3. В угловом секторе стадиона в первом ряду 7 мест, а в каждом следующем на 2 больше, чем в предыдущем. Сколько мест в 26-м ряду?

Ответ: ________________.

4. Автобус ехал по городу со скоростью 50 км/ч некоторое время. Затем он ехал в 2 раза быстрее по междугородней трассе в соседний город, на что времени у него ушло в 3 раза больше того, что он ехал по городу. На весь путь он потратил час. Сколько километров проехал автобус за этот час?

Ответ: ________________.

5. В куске сплава меди и цинка количество меди увеличили на 40%, а количество цинка уменьшили на 40%. В результате общая масса куска сплава увеличилась на 20%. Определите процентное содержание меди и цинка в первоначальном куске сплава.

Ответ: ________________.

6. Автобус ехал по трассе от пункта A до пункта B со скоростью 80 км/ч. Выехав обратно, он 30 км ехал со скоростью, вдвое меньшей первоначальной. Затем он увеличил скорость на 50 км/ч и доехал до пункта A, не меняя более скорости. Найдите расстояние (в км) от пункта A до пункта B, если на обратный путь водитель затратил на $\frac{5}{18}$ часа меньше.

Ответ: ________________.

7. В двух группах 50 учащихся. Когда число учащихся первой группы уменьшили на 20%, а второй группы увеличили на 40%, то в первой группе стало на 4 ученика меньше, чем во второй. Сколько учащихся было в каждой группе первоначально?

Ответ: ________________.

8. В корзине были яблоки. Сначала из неё взяли половину яблок, затем $\frac{1}{3}$ оставшихся яблок и ещё 4 яблока, после чего осталось 12 яблок. Сколько яблок было в корзине первоначально?

Ответ: ________________.

Вариант № 2

1. Одна из сторон прямоугольника на 4 больше другой. Найдите стороны прямоугольника, если его площадь равна 96.

Ответ: ________________.

2. Весной на рынке стоимость огурцов каждую неделю снижается на 10% от предыдущей стоимости. В начале недели цена килограмма огурцов была равна 50 руб. Сколько будет стоить килограмм огурцов через 17 дней?

1) 5 2) 9,5 3) 40,5 4) 45

3. В первый день мастер сделал 25 деталей. В каждый следующий день он делал на 3 детали больше, чем в предыдущий. Укажите количество деталей, сделанных мастером в k-й день.

Ответ: ________________.

4. На клумбе растут ромашки, тюльпаны и розы. Причём ромашек в 3 раза больше, чем тюльпанов, а роз на 25 меньше, чем ромашек. Сколько ромашек растёт на клумбе, если общее количество цветов равно 59?

Ответ: ________________.

5. Сплав меди с цинком, содержащий 5 кг цинка, сплавлен с 15 кг цинка. В результате содержание меди в сплаве понизилось по сравнению с её первоначальным содержанием в сплаве на 30%. Какой могла быть первоначальная масса сплава (в кг)?

Ответ: ________________.

6. Из гавани вышли три катера с интервалом 1 ч. Скорость первого равна 30 км/ч, второго — 40 км/ч. Известно, что после того, как третий догонит второго за некоторое время, потребуется ещё столько же времени, чтобы второй катер догнал первый. Найдите скорость третьего катера (в км/ч).

Ответ: ________________.

7. Две бригады, работая вместе, вспахали поле за 8 ч. За сколько часов может вспахать поле каждая бригада, работая самостоятельно, если второй бригаде на это необходимо на 12 ч больше, чем первой?

Ответ: ________________.

8. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если к этому числу прибавить 36, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите исходное число.

Ответ: ________________.

Вариант № 3

1. Одна из сторон прямоугольника на 5 см меньше другой. Найдите стороны прямоугольника (в см), если площадь прямоугольника равна площади квадрата со стороной 6 см.

Ответ: ________________.

2. В двух пачках было одинаковое количество тетрадей. Когда из первой пачки во вторую переложили 18 тетрадей, то во второй стало в 4 раза больше тетрадей, чем в первой. Сколько тетрадей было в каждой пачке первоначально?

Ответ: ________________.

3. В корзине лежали яблоки, груши и апельсины, всего 59 штук. Яблок было в 3 раза больше, чем груш, а апельсинов — на 25 штук меньше, чем яблок. Сколько яблок было в корзине?

Ответ: ________________.

4. Разность двух целых чисел равна 12. Сумма этих чисел, сложенная с частным от деления большего числа на меньшее, равна 24. Найдите эти числа.

Ответ: ________________.

5. На один костюм и четыре платья пошло 11 м ткани, а на три таких же костюма и два таких же платья — 13 м. Сколько метров ткани потребуется на одно платье и на один костюм?

Ответ: ________________.

6. Расстояние между пунктами А и Б по реке 24 км. Катер проплыл от пункта А до пункта Б и вернулся обратно, затратив на весь путь 3,5 часа. Найдите собственную скорость катера (в км/ч), если скорость течения реки 2 км/ч.

Ответ: ________________ .

7. Расстояние, равное 960 км, первый автомобиль проходит на 2 часа быстрее второго. За время, которое требуется первому автомобилю на прохождение 60 км, второй успевает пройти 50 км. Найдите скорость каждого автомобиля (в км/ч).

Ответ: ________________ .

8. Насос может выкачать из бассейна $\frac{2}{3}$ воды за $7\frac{1}{2}$ мин. Проработав 9 мин, насос остановился. Найдите вместимость бассейна (в м^3), если после остановки насоса в бассейне осталось ещё 20 м^3 воды.

Ответ: ________________ .

Вариант № 4

1. Коробок конфет на 6 меньше, чем конфет в каждой коробке. Сколько всего коробок конфет, если всего в них находится 135 конфет?

Ответ: ________________ .

2. В двух пачках было одинаковое количество книг. Из первой пачки переложили во вторую 20 книг, после чего книг во второй пачке стало в 3 раза больше, чем в первой. Сколько книг было в каждой пачке первоначально?

Ответ: ________________ .

3. После посещения рынка у хозяйки в сумке были яблоки, мандарины и апельсины. Всего 56 штук. Яблок было в 2 раза больше, чем апельсинов, а мандаринов — на 8 штук больше, чем апельсинов. Сколько штук мандаринов в сумке у хозяйки?

Ответ: ________________ .

4. Дано двузначное число. Разность между его первой и второй цифрами равна 3, а их сумма равна 7. Найдите это число.

Ответ: ________________ .

5. На два костюма и три платья пошло 12 м ткани, а на три таких же костюма и два таких же платья — 13 метров ткани. Сколько метров ткани потребуется на два платья и один костюм?

Ответ: ________________ .

6. Катер прошёл 12 км по течению реки и 2 км против течения. На весь путь он потратил 1 час 20 мин. Определите собственную скорость катера (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч.

Ответ: ________________ .

7. Расстояние, равное 630 км, автомобиль проезжает на 2 часа быстрее мотоцикла. За время, которое потребуется автомобилю на прохождение 45 км, мотоцикл успеет проехать 35 км. Найдите скорость мотоцикла (в км/ч).

Ответ: ________________ .

8. Насос может выкачать из бассейна треть воды за 15 мин. Проработав 18 мин, насос остановился. Найдите вместимость бассейна (в м^3), если после остановки насоса в бассейне осталось ещё 60 м^3 воды.

Ответ: ________________ .

Вариант № 5

1. В двух коробках лежит одинаковое количество пачек печенья. Если из первой коробки вынуть 25 пачек, а из второй — 10, то в первой коробке останется в 2 раза меньше пачек, чем во второй. Сколько пачек печенья было в каждой коробке первоначально?

Ответ: ________________ .

2. Бабушка слепила вареники с картошкой и с творогом. Причём вареников с творогом было на 12 штук больше, чем вареников с картошкой. Сколько было вареников с картошкой, если они составляли 80% от вареников с творогом?

Ответ: ________________ .

3. Книг по математике на 5 больше, чем книг по физике, которые составляют 40% от общего числа книг по математике и физике. Сколько всего книг?

Ответ: ________________ .

4. Двузначное число в 5 раз больше суммы своих цифр и в 2,25 раз больше их произведения. Найдите это число.

Ответ: ________________ .

5. На одну и ту же сумму денег можно купить 3 карандаша и 4 резинки или 5 карандашей и одну резинку. Сколько процентов составляет стоимость четырёх карандашей от общей стоимости четырёх карандашей и девяти резинок?

Ответ: ________________ .

6. От пристани вниз по реке отправляется плот. Через два часа от той же пристани отправляется катер, собственная скорость которого в 3 раза больше скорости течения. Сколько часов потребуется катеру, чтобы догнать плот и вернуться к пристани?

Ответ: ________________.

7. Из пункта A в пункт B выезжает автобус. Через час из пункта A выезжает второй автобус, ещё через три часа он догоняет первый и приезжает в B на час раньше первого. Через сколько часов они встретятся, если будут ехать из A и из B соответственно навстречу друг другу?

Ответ: ________________.

8. Первоначально было 5 л раствора соли, потом к нему добавили 2 л другого раствора соли, после чего концентрация соли понизилась на 2% по сравнению с первоначальной. Найдите, на сколько процентов концентрация первого раствора больше концентрации второго.

Ответ: ________________.

Вариант № 6

1. Мотоциклист догоняет велосипедиста. Сейчас расстояние между ними составляет 12 км. Скорость мотоциклиста в 3,5 раза больше скорости велосипедиста. Найдите расстояние между велосипедистом и мотоциклистом (в км) через 3 часа, если известно, что мотоциклист догонит велосипедиста через $\frac{2}{5}$ часа.

Ответ: ________________.

2. Коза Зоя даёт на 30% больше молока, чем коза Белка. Сколько молока в месяц даёт Белка, если Зоя даёт 65 л в месяц?

1) 19,5 2) 84,5 3) 50 4) 45,5

3. В бильярдной пирамиде (см. рис. 150) пять рядов и 15 шаров. Сколько шаров в подобной пирамиде с 39 рядами?

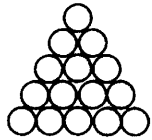


Рис. 150.

Ответ: ________________.

4. Сплав меди, олова и свинца весит 105 кг. При этом меди в сплаве на 15 кг меньше, чем олова, а свинца в 2,5 раза больше, чем меди. Сколько килограммов свинца содержит сплав?

Ответ: ________________.

5. Смешали 30%-й и 50%-й растворы азотной кислоты и получили 45%-й раствор. Найдите отношение массы 30%-го раствора к массе 50%-го раствора, взятых первоначально.

Ответ: ________________.

6. Моторная лодка прошла 39 км по течению реки и 28 км против течения реки за то же время, за которое она могла пройти по озеру 70 км. Найдите скорость лодки в стоячей воде (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч.

Ответ: ________________.

7. Первый насос перекачивает 90 м^3 воды на 1 час быстрее, чем второй 100 м^3. Сколько воды (в м^3) ежечасно перекачивает каждый насос, если первый перекачивает за час на 5 м^3 воды больше, чем второй?

Ответ: ________________.

8. Кочан капусты на $\frac{4}{5}$ кг тяжелее $\frac{4}{5}$ этого же кочана. Какова масса кочана капусты (в кг)?

Ответ: ________________.

§ 19. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей

Основные сведения

Элементы комбинаторики

Комбинаторика — это раздел математики, изучающий количества комбинаций.

Правило суммы. Если объект типа A можно выбрать n способами, а другой объект типа B можно выбрать m способами, то выбор объекта «либо типа A, либо типа B» можно осуществить $n + m$ способами.

Правило произведения. Если некоторый объект A можно выбрать n способами, а после каждого такого выбора другой объект B можно выбрать (независимо от выбора объекта A) k способами, то пары объектов A и B можно выбрать $n \cdot k$ способами.

Случайные события и их вероятности

Опытом, или испытанием, называют всякое осуществление комплекса условий или действий, при которых наблюдается соответствующее явление. В результате эксперимента наступает один из **элементарных исходов**.

Случайным называется **событие**, которое в данном опыте может произойти, а может и не произойти. Некоторые элементарные исходы влекут за собой наступление какого-то события (благоприятствуют событию), а некоторые — нет.

Событие называют **достоверным** в данном опыте, если оно обязательно произойдёт в этом опыте. Событие называется **невозможным** в данном опыте, если оно в этом опыте произойти не может.

Два события называются **совместными** в данном опыте, если появление одного из них не исключает появления другого в этом опыте, и **несовместными**, если они не могут произойти вместе при одном и том же испытании.

Два события называются **противоположными**, если появление одного из них равносильно непоявлению другого.

События считают **равновозможными**, если нет оснований полагать, что одно событие является более возможным, чем другие.

Суммой, или **объединением**, двух событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них. Сумма двух событий A и B обозначается $A + B$ (или $A \cup B$).

Эта сумма означает событие, заключающееся в появлении хотя бы одного из них.

Произведением, или **пересечением**, двух событий называется событие, состоящее в одновременном их появлении. Произведение двух событий A и B обозначается через AB (или $A \cap B$).

Разностью событий A и B называется событие C, которое означает, что наступает событие A и не происходит событие B. Разность событий принято обозначать $A - B$ (или $A \setminus B$).

Если при каждом осуществлении комплекса условий, при котором происходит событие A, происходит и событие B, то говорят, что A влечёт за собой B, или A является частным случаем B, и обозначается: $A \subset B$. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то говорят, что A и B равносильны: $A \equiv B$.

Вероятность события

Классическое определение вероятности. **Вероятность события** A определяется формулой

$$P(A) = m/n,$$

где n — число всех равновозможных, образующих полную группу элементарных исходов опыта, m — число элементарных исходов, благоприятствующих событию A.

Вероятность $P(C)$ наступления хотя бы одного из двух несовместных событий A и B равна сумме их вероятностей:

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Вероятность $P(\bar{A})$ противоположного события $\bar{A}$ событию A:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Статистика — это отрасль знаний, изучающая общие вопросы сбора, измерения и анализа массовых данных. Математическая статистика занимается в основном анализом уже полученных данных.

Данные могут быть представлены графически, в виде ряда данных или в виде таблиц.

Статистическое определение вероятности. **Относительная частота** события A (или просто **частота**) определяется формулой

$$W(A) = m/n,$$

где m — число опытов, в которых появилось событие A, n — число всех проведённых опытов.

Круговая диаграмма отображает целое в виде круга, а вклад нескольких элементов данных в виде секторов этого круга.

Столбчатые диаграммы изображают статистические данные в виде вертикальных прямоугольников.

Рядом данных (или **рядом распределения**) называют результаты измерения, перечисленные в порядке их получения. Каждый из результатов называется **вариантой** измерения.

Кратность варианты — количество её повторений в ряду данных.

Числовые характеристики данных

Объём измерения — количество всех данных этого измерения. Одна из наиболее важных характеристик варианты — это её частота. Частота варианты показывает долю этой варианты в ряду распределения.

Она вычисляется по формуле $\textbf{частота} = \dfrac{\textbf{кратность варианты}}{\textbf{объём измерения}}$.

Размах измерения — разность между максимальной и минимальной вариантами этого измерения.

Мода измерения — варианта, которая в измерении встретилась чаще других.

Медиана распределения — такое значение измеряемого признака, которое делит ряд распределения на две равные части: не больше этого значения и не меньше этого значения. Проще говоря, это центральное число в упорядоченном ряду данных, если в ряду нечётное количество чисел, или полусумма двух центральных, если в ряду чётное количество чисел.

Для нахождения медианы распределения необходимо

1. Упорядочить ряд распределения по возрастанию или по убыванию: $a_1, a_2, \ldots$.

2. Если объём измерения нечётный, то есть $2n+1$, то получим следующую ситуацию:

$$\underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_n}_{n \text{ значений}}, a_{n+1}, \underbrace{a_{n+2}, \ldots, a_{2n+1}}_{n \text{ значений}}.$$

В этом случае медианой является число a_{n+1}.

3. Если объём измерения чётный, то есть $2n$, то имеем

$\underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_n}_{n \text{ значений}}, \underbrace{a_{n+1}, \ldots, a_{2n}}_{n \text{ значений}}$ В этом случае медианой является число $\dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$.

Среднее ряда (среднее арифметическое) — сумма всех чисел ряда, делённая на их количество. Если имеется таблица распределения, то можно

1) умножить каждую варианту на её кратность;
2) просуммировать полученные значения;
3) разделить результат на объём измерения.

Элементы статистики

Математическая статистика — наука, разрабатывающая математические методы систематизации и использования статистических данных для научных и практических выводов.

Мода — значение признака, имеющее наибольшую частоту в статистическом ряду распределения.

Среднее арифметическое (или просто среднее) набора чисел — это сумма всех чисел в этом наборе, делённая на их количество.

Медиана — это такое значение признака, которое разделяет ранжированный (упорядоченный) ряд распределения на две равные части. Для нахождения медианы нужно отыскать значение признака, которое находится на середине упорядоченного ряда.

Демонстрационный вариант

1. У Андрея 4 книги по математике, а у Максима — 3. Сколькими способами они могут обменять 1 книгу одного на 1 книгу другого?

1) 18 2) 12 3) 9 4) 4

Решение. Чтобы мальчики смогли обменять одну книгу одного на одну книгу другого, каждому из них нужно выбрать из своих книг ровно одну книгу для обмена. Определим, сколькими способами это может сделать каждый из них. Андрей может выбрать книгу 4 способами, а Максим — 3. По правилу произведения получаем, что всего $3 \cdot 4 = 12$ вариантов.

Ответ: 12.

2. Сколькими способами можно выбрать 2 карты из колоды в 36 карт?

Решение. Первую карту можно выбрать 36 способами, вторую — 35. То есть всего $36 \cdot 35$ вариантов, которые учитывают порядок. На самом деле, порядок не важен и при подобном подсчёте мы каждый интересующий нас вариант учли дважды. Значит, всего существует $36 \cdot 35 : 2 = 630$ вариантов.

Ответ: 630.

3. На столе лежат 20 упаковок изоляционной ленты: из них 8 — синего цвета, 5 — красного, 2 — жёлтого, 3 — чёрного, а остальные — белого.

Электрик наудачу взял одну упаковку изоленты. Какова вероятность, что это белая изолента?

Решение. На столе лежат $20 - 8 - 5 - 2 - 3 = 2$ упаковки изоляционной ленты белого цвета. Эксперимент «случайного выбора одной упаковки изоленты» имеет 20 равновозможных исходов (по числу упаковок изоляционной ленты). Однако из этих 20 исходов лишь 2 благоприятствуют событию «взята белая изоляционная лента». По классическому определению вероятности искомая вероятность равна $\frac{2}{20} = 0{,}1$.

Ответ: 0,1.

4. Вероятность рождения мальчика равна 0,5. В семье есть два мальчика и ждут ещё одного ребёнка. Найдите вероятность того, что родится девочка.

Решение. События рождения девочки или мальчика являются независимыми. (В том числе эти события не зависят от того, мальчики или девочки рождались в семье прежде или вообще семья не имела детей на момент рождения ребёнка.)

Поэтому вероятность рождения девочки равна $1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

5. Бросают три игральных кубика. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет не более четырёх очков.

1) $\frac{1}{108}$ 2) $\frac{1}{54}$ 3) $\frac{1}{216}$ 4) $\frac{1}{9}$

Решение. Все равновозможные исходы при бросании трёх кубиков образуют множество троек, в которых первая цифра — количество очков, выпавших на первом кубике, вторая — на втором, третья — на третьем. Количество всевозможных троек равно $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

Событию выпадения на трёх кубиках не более четырёх очков соответствуют четыре тройки $(1; 1; 1)$, $(1; 1; 2)$, $(1; 2; 1)$ и $(2; 1; 1)$. Следовательно, вероятность того, что в сумме на трёх игральных кубиках выпадет не более четырёх очков, равна $\frac{4}{216} = \frac{1}{54}$. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

6. На диаграмме (см. рис. 151) показано содержание питательных веществ в некотором продукте (* — к прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества.).

Сколько примерно белков содержится в 1000 граммах этого продукта?

1) около 350 г 2) около 220 г 3) около 25 г 4) около 450 г

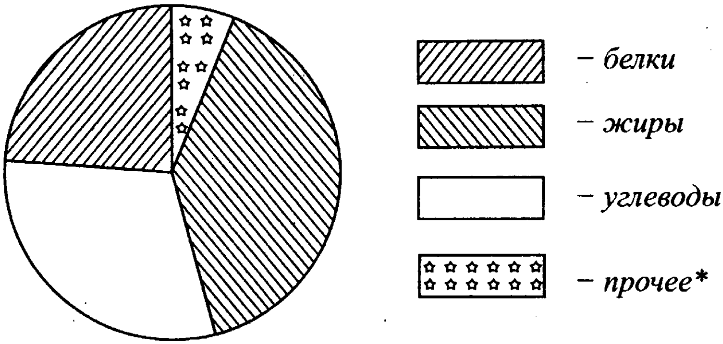


Рис. 151.

Решение.

Сектор, соответствующий белкам, занимает меньше четверти круга, значит белков — меньше 250 грамм, в то время как первый и третий варианты ответов подразумевают существенно большее число граммов. Значит, эти варианты не подходят. Очевидно, что 25 грамм — слишком мало, в то время как рассматриваемый сектор ненамного меньше четверти, то есть белков — около 220 граммов.

Ответ: 2

7. На диаграмме (см. рис. 152) представлено распределение ноутбуков на складе магазина. Какое из следующих утверждений неверно, если всего на складе 200 ноутбуков?

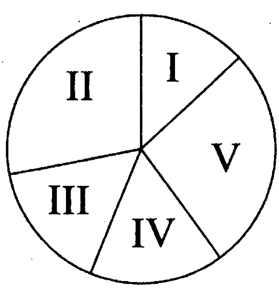


Рис. 152.

1) Ноутбуков четвёртой фирмы меньше четверти.
2) Ноутбуков первой фирмы меньше, чем ноутбуков третьей и четвёртой фирм вместе.
3) Ноутбуков первой и третьей фирмы вместе не меньше 15%.
4) Более ста ноутбуков произведено IV и V фирмами.

Решение. Первое утверждение, очевидно, верно. Ноутбуков первой фирмы меньше, чем ноутбуков третьей фирмы, а значит ноутбуков первой фирмы и подавно меньше, чем ноутбуков третьей и четвёртой фирмы в сумме. Таким образом, второе утверждение тоже верно. Сектора, соответствующие первой и третьей фирмам, в сумме занимают около четверти круга, то есть около 25 процентов и явно больше 15 процентов. Значит, третье утверждение верно. Сектора, соответствующие четвёртой и пятым фирмам, в сумме занимают меньше половины круга, всего на складе 200 ноутбуков, значит четвёртой и пятой фирмами произведено меньше 100 ноутбуков, поэтому четвёртое утверждение неверно.

Ответ: 4

8. Измеряя вес семи пришедших на урок учеников, учитель физкультуры получил ряд чисел: 51, 53, 59, 52, 55, 54, 51. Найдите разность между модой и медианой этого ряда.

1) 1 2) -1 3) -2 4) 0

Решение. Модой ряда является число, наиболее часто в нём встречающееся. В данном ряде мода равна 51.

Для того чтобы найти медиану, упорядочим заданный ряд по возрастанию: 51, 51, 52, 53, 54, 55, 59. Поскольку в этой последовательности нечётное число элементов, то медианой ряда будет число, стоящее посередине, то есть 53. Следовательно, разность между модой и медианой равна $51 - 53 = -2$. Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

Вариант № 1

1. У Святополка Васильевича пять разных шариковых ручек, семнадцать разных карандашей и две линейки. Сколькими способами он может выбрать одну ручку, один карандаш и одну линейку?

Ответ: ________________.

2. В классе 20 учеников. Сколькими способами можно выбрать старосту и заместителя старосты?

Ответ: ________________.

3. В фирме такси в данный момент свободно 40 машин: 16 чёрных, 12 жёлтых и 12 зелёных. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчику. Найдите вероятность того, что к нему приедет жёлтое такси.

Ответ: ________________.

4. В соревнованиях по акробатике участвуют 8 спортсменов из Китая, 7 спортсменов из Швейцарии, 6 спортсменов из Армении и 9 из Вьетнама. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что третьим будет выступать спортсмен из Армении.

Ответ: ________________.

5. Коля выбирает трёхзначное число. Найдите вероятность того, что оно делится на 51. Ответ округлите до сотых.

Ответ: ________________.

6. На диаграмме (см. рис. 153) показано содержание питательных веществ в некотором продукте. Каких веществ больше всего (* — к прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества)?

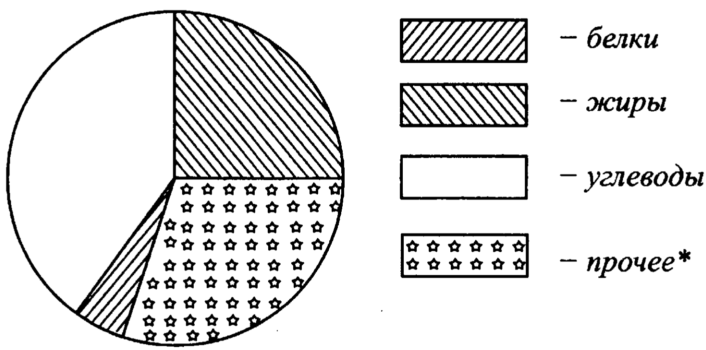


Рис. 153.

1) жиры 2) белки 3) углеводы 4) прочее

7. На диаграмме (см. рис. 154) показан религиозный состав населения города Z. Определите по диаграмме, в каких пределах находится доля протестантов.

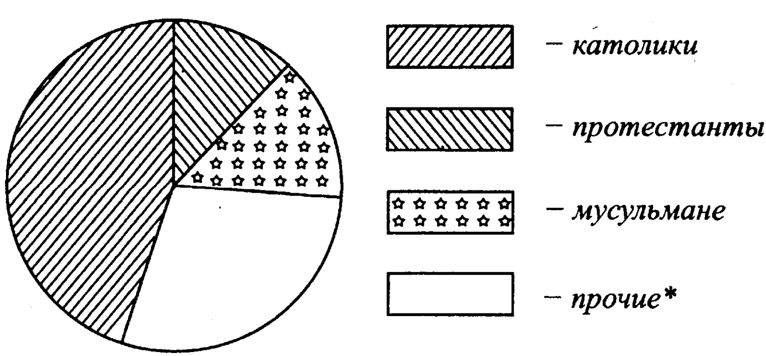


Рис. 154.

1) 0 – 5% 2) 5 – 20% 3) 20 – 40% 4) 40 – 70%

8. В классах 9 «А» и 9 «Б» провели медицинское обследование. При этом измерили вес учеников (с точностью до 5 кг). Результаты (в кг) представлены в таблице:

9 «А»	60	55	65	45	70	65	60	70	50	65	60
9 «Б»	50	55	70	60	65	60	70	60	55	60	75

Найдите разность между объёмами измерений для классов «А» и «Б».

1) 1 2) 0 3) 5 4) 10

Вариант № 2

1. У Родиона Платоновича семь разных учебников по географии, девять — по биологии и шесть — по истории. Ещё у него есть двадцать различных тетрадей. Сколькими способами он может выбрать один учебник и одну тетрадь?

Ответ: ________________.

2. У Никиты 10 учебников. Сколькими способами можно выбрать 3 из них и уложить в стопку (порядок имеет значение)?

Ответ: ________________.

3. В магазине ёлочных украшений продаётся 100 шариков, из них 39 — красные, 14 — зелёные, 17 — жёлтые, ещё есть синие и оранжевые, их поровну. Покупатель случайно разбил один шарик. Какова вероятность, что это был красный или оранжевый шарик?

Ответ: ________________.

4. В среднем на 200 карманных фонариков, поступивших в продажу, приходится восемнадцать неисправных. Найдите вероятность того, что случайно выбранный в магазине фонарик окажется исправен.

Ответ: ________________.

5. Магдалина Фёдоровна бросила игральную кость 2 раза. Найдите вероятность того, что оба раза выпало чётное число очков.

Ответ: ________________.

6. На диаграмме (см. рис. 155) показан возрастной состав населения города Нижнеосенск. Определите по диаграмме, жители какого возраста составляют более 50% от всего населения.

1) 0 – 25 лет
2) 26 – 45 лет
3) 46 – 65 лет
4) 66 лет и более

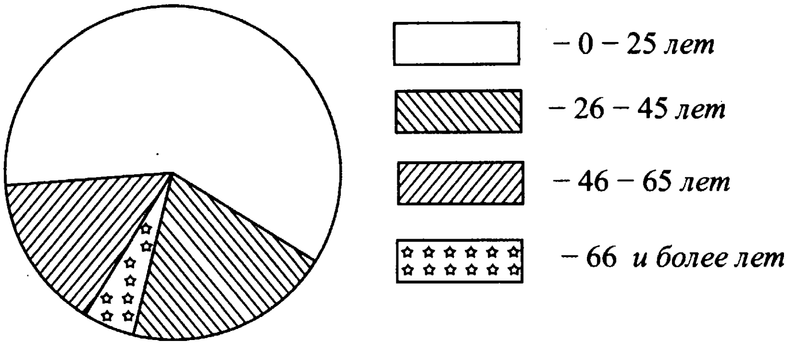


Рис. 155.

7. На диаграмме (см. рис. 156) представлено соотношение ручек на витрине магазина канцелярских товаров. Какое из следующих утверждений верно, если всего на витрине 400 ручек?

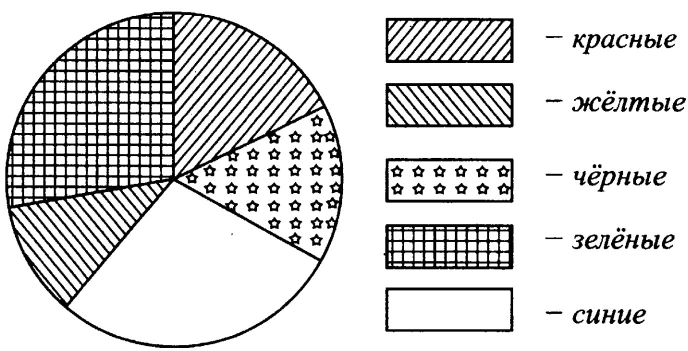


Рис. 156.

1) Чёрных ручек больше, чем зелёных.
2) Жёлтых ручек не меньше 70.
3) Красных и жёлтых ручек вместе меньше, чем синих и чёрных.
4) Зелёных ручек больше 40%.

Ответ: ________________.

8. На письменном экзамене по математике можно получить от 0 до 10 баллов. Десять учеников получили такие оценки: 10, 4, 5, 7, 7, 6, 9, 4, 8, 5. Определите размах ряда.

Ответ: ________________.

Вариант № 3

1. У Виссариона Глебовича десять красных тетрадей и восемь жёлтых. Также у него четырнадцать шариковых авторучек и одиннадцать гелевых. Сколькими способами можно выбрать одну тетрадь и одну ручку?

Ответ: ________________.

2. У Леонида Несторовича два игральных кубика разных цветов. Сколькими способами они могут упасть так, чтобы сумма очков равнялась 5?

Ответ: ________________.

3. На тарелке 25 пирожков: 8 с мясом, 15 с печенью и 2 с яблоком. Олеся наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что он окажется с яблоком.

Ответ: ________________.

4. В среднем из каждых 60 поступивших в продажу аккумуляторов 42 аккумулятора заряжены. Найдите вероятность того, что выбранный в магазине наудачу аккумулятор не заряжён.

Ответ: ________________.

Ответ: 0,7.

5. Магдалина Фёдоровна бросила игральную кость 2 раза. Найдите вероятность того, что хотя бы один раз выпало чётное число очков.

Ответ: ________________.

6. На диаграммах (см. рис. 157) показаны религиозные составы населения 4 городов: K, L, M, N. Определите по диаграмме, в каком городе доля католиков наибольшая.

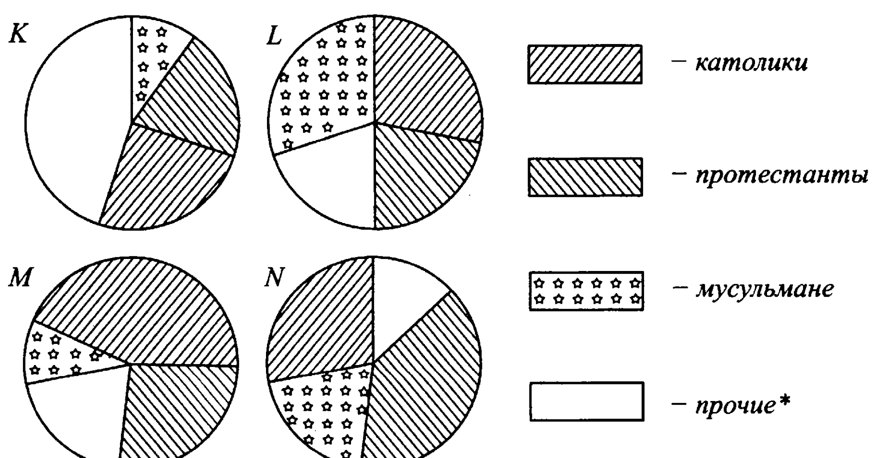


Рис. 157.

1) K 2) L 3) M 4) N

7. На диаграмме (см. рис. 158) представлены семь самых посещаемых за неделю фильмов в кинотеатре R.

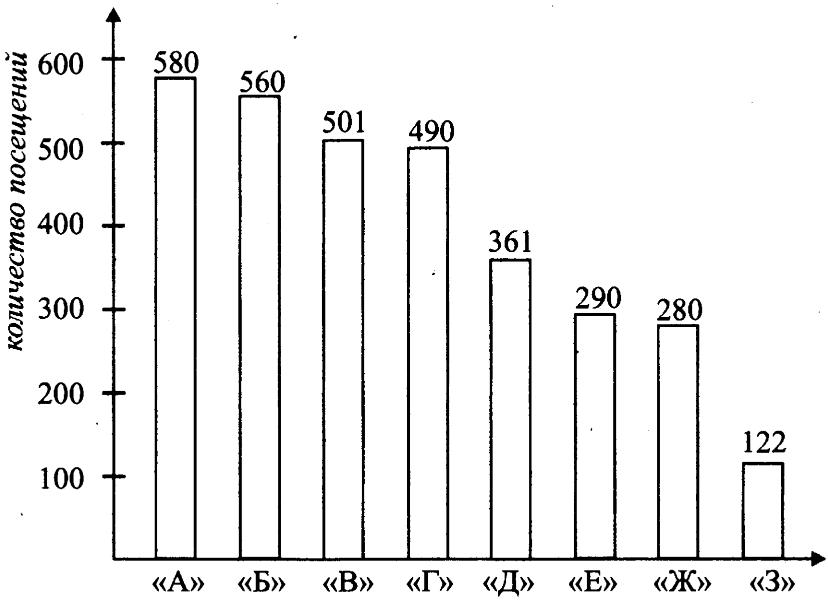


Рис. 158.

Какие из следующих утверждений верны?

1) Фильм «А» пользовался наибольшим спросом у зрителей.
2) Фильм «Б» посмотрело на 428 зрителей больше, чем фильм «З».
3) Фильм «Е» посмотрело меньше людей, чем фильм «В».
4) Фильмы «А» и «Г» в сумме посмотрело меньше, чем «Б» и «В».

Ответ: ________________.

8. В классах 9 «А» и 9 «Б» провели медицинское обследование. При этом измерили вес учеников (с точностью до 5 кг). Результаты (в кг) представлены в таблице:

9 «А»	60	55	65	45	70	65	60	70	50	65	75
9 «Б»	50	55	70	60	65	60	70	60	55	60	75

Найдите разность между модами измерений для классов «А» и «Б».

1) 1 2) 0 3) 5 4) 10

Вариант № 4

1. Аделаида бросает две игральные кости: чёрную и белую. После этого она записывает слева количество очков на чёрной кости, справа — на белой. Сколько существует вариантов возможной записи?

Ответ: ________________.

2. У Осипа Валерьевича два игральных кубика разных цветов. Сколькими способами они могут упасть так, чтобы сумма очков равнялась 6?

Ответ: ________________.

3. На экзамене по истории 30 билетов, Феоктист не выучил 12 из них. Найдите вероятность того, что ему попадётся выученный билет.

Ответ: ________________.

4. На экзамене по литературе школьнику достанется один вопрос из сборника. Вероятность того, что это вопрос на тему «Проза XX века», равна 0,4. Вероятность того, что это окажется вопрос на тему «Поэзия XX века», равна 0,22. В сборнике нет вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Ответ: ________________.

5. Семён Игоревич в случайном эксперименте симметричную монету бросает дважды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

Ответ: ________________.

6. На диаграммах (см. рис. 159) указаны распределения площадей в четырёх агрофирмах. Определите, в какой агрофирме доля пастбищ и сенокосов превышает 25%.

1) А 2) Б 3) В 4) Г

7. На диаграмме (см. рис. 160) показано распределение сотрудников некоторого завода по возрастам.

Какие из следующих утверждений верны, если всего на заводе 2400 сотрудников?

1) В возрасте от 18 до 47 лет не меньше 60 процентов сотрудников.
2) В возрасте от 36 до 47 лет работает меньше 500 человек.
3) В возрасте от 48 до 60 лет — более 600 сотрудников завода.
4) Около четверти сотрудников старше 61 года.

Ответ: ________________.

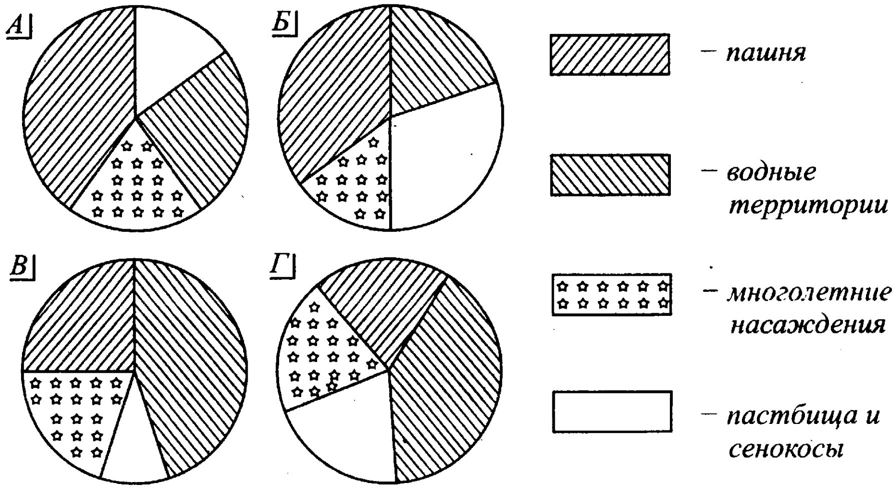


Рис. 159.

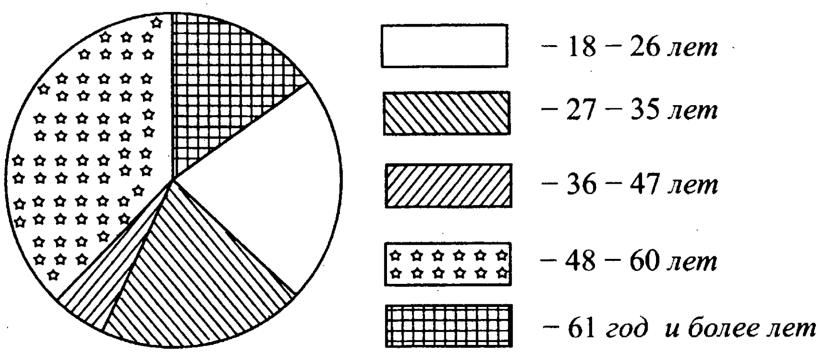


Рис. 160.

8. Дан ряд чисел: 16, 15, 18, 12, 13, 20, 16, 14, 11. Найдите среднее этого ряда.

1) 13 2) 14 3) 15 4) 16

Ответ: ________________ .

Вариант № 5

1. Сколькими способами можно расставить 3 песни, которые должны прозвучать на концерте?

Ответ: ________________ .

2. В классе 22 человека. Сколькими способами можно из них выбрать двух дежурных (порядок не важен)?

Ответ: ________________ .

3. Мирослав Мстиславович бросил игральный кубик. Найдите вероятность того, что выпадет нечётное количество очков.

Ответ: ________________.

4. В таблице представлены результаты четырёх стрелков, показанные ими на тренировке.

Номер стрелка	Число выстрелов	Число попаданий
1	40	24
2	60	39
3	100	62
4	50	29

Тренер решил послать на соревнования того стрелка, у которого относительная частота попаданий выше. Кого из стрелков выберет тренер? Укажите в ответе его номер.

Ответ: ________________.

5. Стрелок 4 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что стрелок попал в мишень три раза и один раз промахнулся.

Ответ: ________________.

6. На столбчатой диаграмме (см. рис. 161) показано число жителей в крупнейших городах страны N. Город А — самый крупный, город Б — на седьмом месте. На каком месте город Д?

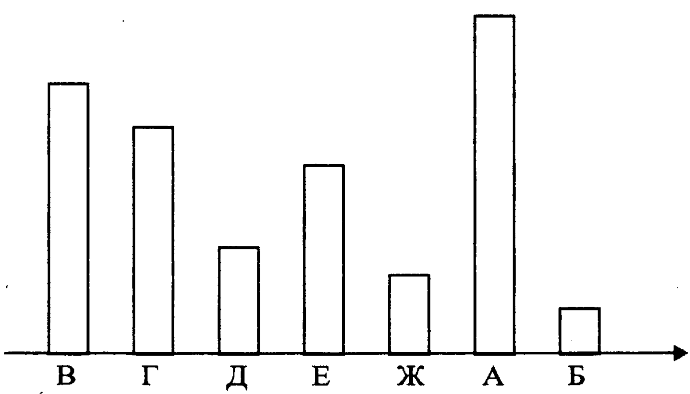


Рис. 161.

Ответ: ________________.

7. В среднем каждый посетитель столовой съедает 282 грамма гречневой каши. Николай Валентинович съел 178 граммов гречневой каши. Какое из следующих утверждений верно?

1) Все посетители столовой, кроме Николая Валентиновича, съели по 282 грамма гречневой каши.
2) Обязательно найдётся посетитель, который съел больше 282 граммов гречневой каши.
3) Обязательно найдётся посетитель, который съел меньше, чем Николай Валентинович.
4) Обязательно найдётся посетитель, который съел ровно 282 грамма гречневой каши.

8. Учительница попросила пятерых опоздавших учеников выписать на доске время в минутах, которое они в среднем тратят на дорогу из дома до школы. Получились следующие данные: 20, 25, 35, 30, 40.

Насколько среднее значение этого ряда превосходит его размах?

1) 10 2) 20 3) 5 4) 0

Вариант № 6

1. Сколькими способами можно расставить 4 человек в очереди?

Ответ: ________________.

2. В доме 120 квартир. Сколькими способами вор может выбрать две из них (порядок не важен)?

Ответ: ________________.

3. В каждой двадцатой бутылке газированной воды согласно условиям акции есть приз. Призы распределены по бутылкам случайно. Гера покупает бутылку минеральной воды в надежде выиграть приз. Найдите вероятность того, что Гера не найдёт приз в своей банке.

Ответ: ________________.

4. Известно, что в некотором регионе вероятность того, что родившийся младенец окажется мальчиком, равна 0,473. В 2010 г. в этом регионе на 1000 родившихся младенцев в среднем пришлось 509 девочек. Насколько частота рождения девочки в 2010 г. в этом регионе отличается от вероятности этого события?

Ответ: ________________.

5. Стрелок четыре раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что стрелок в первый и третий разы попадёт по мишени, а остальные — промахнётся.

Ответ: ________________.

6. Какая из следующих круговых диаграмм (см. рис. 162) показывает распределение книжек на полках магазина, если художественная литература занимает 34%, учебники — 18%, профессиональная литература и энциклопедии — 32%, прочее — 16%.

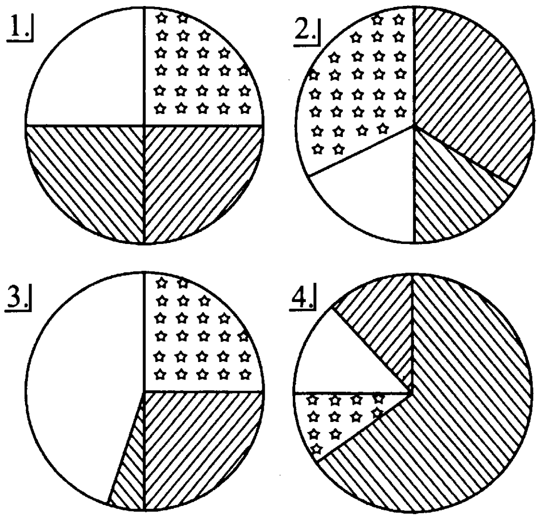


Рис. 162.

Ответ: ________________.

7. Средний вес футболиста команды «Дикари» — 84 кг. Вес футболиста Егора Егоркина — 84 килограмма. Какое из следующих утверждений верно?

1) Егор — самый тяжеловесный игрок команды.
2) Обязательно найдётся игрок, помимо Егора, весом 84 кг.
3) Обязательно найдётся игрок весом меньше 84 килограммов.
4) Обязательно найдётся игрок, помимо Егора, весом не более 84 килограммов.

Ответ: ________________.

8. Дан ряд чисел: 16, 15, 18, 12, 13, 20, 16, 14. Найдите медиану этого ряда.

1) 13 2) 14,5 3) 15,5 4) 16

Ответ: ________________.

§ 20. Алгебраические уравнения и системы нелинейных уравнений

Основные сведения

Многочленом n-й степени называется многочлен вида

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$,

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — заданные числа, $a_0 \neq 0$, $n \in N$,

a_0x^n — старший член многочлена $P_n(x)$,

n — степень многочлена,

a_n — свободный член многочлена.

Алгебраическим уравнением n-й степени называется уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$.

Если уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$

с целыми коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$, где $a_n \neq 0$, имеет целый корень, то этот корень является делителем числа a_n (свободного члена уравнения).

Теорема Безу и схема Горнера

Для любого многочлена степени $n > 0$

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

и любого числа $x_0 \in R$ найдётся такой многочлен степени $n-1$

$$q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0,$$

что справедливо равенство

$$f(x) = (x - x_0)\,q(x) + f(x_0) \quad \textbf{(Теорема Безу)},$$

причём коэффициенты многочлена $q(x)$ могут быть вычислены по следующему алгоритму:

$$b_{n-1} = a_n,\ \ b_{n-2} = x_0b_{n-1} + a_{n-1},$$
$$b_{n-3} = x_0b_{n-2} + a_{n-2}, \ldots,\ b_{i-1} = x_0b_i + a_i, \ldots$$
$$\ldots,\ b_1 = x_0b_2 + a_2,\ b_0 = x_0b_1 + a_1,\ f(x_0) = x_0b_0 + a_0.$$

Результаты вычисления коэффициентов многочлена $q(x)$ удобно помещать в таблицу **(схему Горнера)**.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_{i+1}	a_i	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
x_0	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_i	b_{i-1}	$\cdots$	b_1	b_0	$f(x_0)$

Понятно, что если x_0 — корень многочлена $f(x)$, то $f(x_0) = 0$ и, следовательно,

$$f(x) = (x - x_0)\,q(x) \quad \textbf{(следствие из теоремы Безу).}$$

Таким образом, чтобы выяснить, является ли число x_0 корнем многочлена $f(x)$, нужно заполнить приведённую выше таблицу (схему Горнера). Если $f(x_0)$ окажется равным 0, то x_0 — корень. В противном случае x_0 — не корень $f(x)$. Заметим, что x_0 может оказаться корнем многочлена $q(x)$.

Демонстрационный вариант

1. Решите уравнение $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$.

Решение. Заметим, что $x = 2$ — корень уравнения, так как $2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 + 6 = 0$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l}
-\; x^3 - 4x^2 + x + 6 & x - 2 \\ \cline{2-2}
x^3 - 2x^2 \phantom{{}+x+6} & x^2 - 2x - 3 \\ \cline{1-1}
-\; -2x^2 + x + 6 & \\
-2x^2 + 4x \phantom{{}+6} & \\ \cline{1-1}
-\; -3x + 6 & \\
-3x + 6 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Корнями уравнения $x^2 - 2x - 3 = 0$ являются $x_2 = -1$ и $x_3 = 3$. Следовательно, корнями исходного уравнения являются значения $x \in \{-1; 2; 3\}$.

Ответ: $-1; 2; 3$.

2. Разделите многочлен $x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 - 6x$ на многочлен $x^2 + 2$.

Решение.

$$\begin{array}{r|l}
-\; x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 - 6x & x^2 + 2 \\ \cline{2-2}
x^5 \phantom{{}+x^4} + 2x^3 \phantom{{}+2x^2-6x} & x^3 + x^2 - 3x \\ \cline{1-1}
-\; x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x & \\
x^4 \phantom{{}-3x^3} + 2x^2 \phantom{{}-6x} & \\ \cline{1-1}
-\; -3x^3 \phantom{{}+2x^2} - 6x & \\
-3x^3 \phantom{{}+2x^2} - 6x & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Ответ: $x^3 + x^2 - 3x$.

3. Решите уравнение $\dfrac{4}{x^2 + 6x + 9} - \dfrac{6}{9 - x^2} = \dfrac{1}{x - 3}$.

Решение. ОДЗ: $x \neq \pm 3$.

Преобразуем исходное уравнение к виду $\dfrac{4}{(x+3)^2} + \dfrac{6}{x^2 - 9} = \dfrac{1}{x - 3}$.

Умножая обе части полученного уравнения на выражение $(x+3)^2(x-3)$, получим $4(x-3)+6(x+3)=(x+3)^2 \Leftrightarrow 4x-12+6x+18=x^2+6x+9 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$. Корнями этого уравнения являются $x_1=1$ и $x_2=3$.

Так как $x_2=3$ не принадлежит ОДЗ, то корень исходного уравнения равен 1.

Ответ: 1.

4. Найдите наибольший корень уравнения
$2x^4+x^3-6x^2+x+2=0$.

Решение. Заметим, что $x=0$ не является корнем данного уравнения. Разделив обе части уравнения на x^2, получим

$$2x^2+x-6+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=0,$$

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0.$$

Обозначим $x+\dfrac{1}{x}=t$, тогда $x^2+2+\dfrac{1}{x^2}=t^2$, отсюда $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$.

Уравнение примет вид $2(t^2-2)+t-6=0 \Leftrightarrow 2t^2+t-10=0 \Leftrightarrow$
$\left[\begin{array}{l} t=2, \\ t=-2{,}5. \end{array}\right.$

Вернёмся к исходной переменной.

1) $x+\dfrac{1}{x}=2 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0$. Отсюда $x=1$.

2) $x+\dfrac{1}{x}=-2{,}5 \Leftrightarrow x^2+2{,}5x+1=0 \Leftrightarrow 2x^2+5x+2=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2}, \\ x=-2. \end{array}\right.$$

Из чисел $-2; -\dfrac{1}{2}; 1$ наибольшее 1.

Ответ: 1.

5. Найдите все рациональные корни уравнения
$x^4-3x^3-13x^2+9x+30=0$.

Решение. Рациональные корни данного уравнения найдём среди делителей свободного члена.

Делители числа 30: $\pm1; \pm2; \pm3; \pm5; \pm6; \pm10; \pm15; \pm30$.

Для некоторых делителей проверим, являются ли они корнями уравнения по схеме Горнера:

	1	−3	−13	9	30	
1	1	−2	−15	−6	24	не корень
−1	1	−4	−9	18	12	не корень
2	1	−1	−15	−21	−12	не корень
−2	1	−5	−3	15	0	корень
−2	1	−7	11	−7		не корень
3	1	−2	−9	−12		не корень
−3	1	−8	21	−48		не корень
5	1	0	−3	0		корень

Следовательно, левую часть уравнения можно разложить на множители:

$(x+2)(x-5)(x^2-3)=0,$

$(x+2)(x-5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0.$

Рациональные корни уравнения: $x=-2$ и $x=5$.

Ответ: -2; 5.

6. Сократите дробь $\dfrac{x^3-3x^2+x-3}{2x^3-x^2+2x-1}$.

Решение. $\dfrac{x^3-3x^2+x-3}{2x^3-x^2+2x-1}=\dfrac{(x^3-3x^2)+(x-3)}{(2x^3-x^2)+(2x-1)}=$

$=\dfrac{x^2(x-3)+(x-3)}{x^2(2x-1)+(2x-1)}=\dfrac{(x-3)(x^2+1)}{(2x-1)(x^2+1)}=\dfrac{x-3}{2x-1}.$

Ответ: $\dfrac{x-3}{2x-1}$.

7. Решите систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{3}{2},\\ x+y+xy=9.\end{cases}$

Решение. Из уравнения $\sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{3}{2}$ выразим x через y.

Обозначим $\sqrt{\dfrac{x}{y}}=t,\ t>0$. Уравнение примет вид

$$t-\frac{1}{t}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2t^2-3t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\dfrac{1}{2},\\ t=2.\end{array}\right.$$

$t=-\dfrac{1}{2}$ не удовлетворяет условию $t>0$.

Вернёмся к исходным переменным: $\sqrt{\dfrac{x}{y}}=2\Leftrightarrow x=4y$.

Подставим $x=4y$ во второе уравнение системы. Получим

$$4y + y + 4y^2 = 9 \Leftrightarrow 4y^2 + 5y - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1, \\ y = -2{,}25. \end{array}\right.$$

Так как $x = 4y$, то при $y = 1$ $x = 4$; при $y = -2{,}25$ $x = -9$.
Следовательно, $(4; 1)$ и $(-9; -2{,}25)$ — решения исходной системы.
Ответ: $(4; 1)$, $(-9; -2{,}25)$.

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} xy = 1, \\ yz = 2, \\ zx = 8. \end{cases}$

Решение.
Способ 1.

$$\begin{cases} xy = 1, \\ yz = 2, \\ zx = 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{x}, \\ \dfrac{z}{x} = 2, \\ zx = 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{x}, \\ z = 2x, \\ 2x^2 = 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{x}, \\ z = 2x, \\ \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -2. \end{array}\right. \end{cases}$$

При $x = 2$: $y = \dfrac{1}{2}$; $z = 4$;

при $x = -2$: $y = -\dfrac{1}{2}$; $z = -4$.

Ответ: $\left(-2; -\dfrac{1}{2}; -4\right)$, $\left(2; \dfrac{1}{2}; 4\right)$.

Способ 2. Перемножая левые и правые части уравнения, получим $x^2y^2z^2 = 16$; $xyz = \pm 4$.

1) Если $xyz = 4$, то, разделив это уравнение поочерёдно на каждое из уравнений исходной системы, получим $\begin{cases} z = 4, \\ x = 2, \\ y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

2) Если $xyz = -4$, то, разделив это уравнение поочерёдно на каждое из уравнений исходной системы, получим $\begin{cases} z = -4, \\ x = -2, \\ y = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Ответ: $\left(-2; -\dfrac{1}{2}; -4\right)$, $\left(2; \dfrac{1}{2}; 4\right)$.

Вариант № 1

1. Решите уравнение $x^2 - 2 = x$.

Ответ: ________________.

2. Решите уравнение $x^6 - 14x^4 + 56x^2 - 64 = 0$.

Ответ: ________________.

3. Чему равно произведение всех корней уравнения $\sqrt{2 - x^2} \cdot (2x^2 - 5x + 3) = 0$?

1) -6 2) -3 3) -2 4) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

4. Решите уравнение $4x + 1 = \frac{9}{x - 1}$.

1) $x_1 = 2; x_2 = 2{,}5$ 2) $x_1 = 2; x_2 = -2{,}5$
3) $x_1 = -2; x_2 = 1{,}25$ 4) $x_1 = 2; x_2 = -1{,}25$

5. Решите уравнение $\frac{6}{x^2 + x - 6} + \frac{2}{2x^2 - 5x + 2} = \frac{x}{2x^2 + 5x - 3}$.

Ответ: ________________.

6. Сократите дробь $\frac{x^3 + 2x^2 - 2x + 3}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$.

Ответ: ________________.

7. Найдите все решения уравнения $x^2 + \frac{2}{x^2} = 3$.

Ответ: ________________.

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{x+3}{y+2} - \frac{y+4}{x-1} = \frac{25}{2}, \\ x - y = 2. \end{cases}$

Ответ: ________________.

Вариант № 2

1. Решите уравнение $x^2 + 3x + 2 = 0$.

Ответ: ________________.

2. Сократите дробь $\frac{4x^4 - 25x^2 + 36}{2x^3 + 3x^2 - 5x - 6}$.

Ответ: ________________.

3. Найдите наибольший из корней уравнения $3x^2 - 5x = 2$.

1) -2 2) $-\frac{1}{3}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) 2

4. Решите уравнение $\dfrac{3}{x^2-2x+1}+\dfrac{2}{1-x^2}=\dfrac{1}{x+1}$.

Ответ: ________________.

5. Найдите все рациональные корни уравнения
$x^3+3x^2-5x-4=0$.

Ответ: ________________.

6. Решите уравнение $5x^3+3x^2-5x-3=0$.

Ответ: ________________.

7. Найдите координаты точек пересечения параболы
$y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{5}{2}x-7$ и прямой $3x+2y-1=0$.

Ответ: ________________.

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=29, \\ 3x-7y=-29. \end{cases}$

Ответ: ________________.

Вариант № 3

1. Решите уравнение $x^3-7x+6=0$.

Ответ: ________________.

2. Разделите многочлен $x^4-x^3+3x^2-2x+2$ на многочлен x^2+2.

Ответ: ________________.

3. Найдите все рациональные корни уравнения $\dfrac{x^2+1}{x+1}+\dfrac{x^2+2}{x-2}=-2$.

Ответ: ________________.

4. Решите уравнение $x^4+3x^3+4x^2+3x+1=0$.

Ответ: ________________.

5. Решите уравнение $x-\dfrac{18}{x}-7=0$.

Ответ: ________________.

6. Решите уравнение $2x^4-5x^3+2x^2-5x=0$.

Ответ: ________________.

7. Найдите все натуральные корни уравнения $\dfrac{2x^2+1}{x+1}-\dfrac{3x+1}{x-1}=2$.

Ответ: ________________.

8. Найдите целочисленные решения системы уравнений
$\begin{cases} xy=6, \\ xz=10, \\ x^2+y^2=13. \end{cases}$

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. Решите уравнение $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.
   Ответ: ________________.
2. Разделите многочлен $x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x - 4$ на многочлен $x^2 + 1$.
   Ответ: ________________.
3. Найдите все рациональные корни уравнения
$x^3 - 5x^2 + 4 = 0$.
   Ответ: ________________.
4. Найдите количество решений системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ 3xy + 2x = 2y. \end{cases}$
   Ответ: ________________.
5. Решите уравнение $\dfrac{8}{x-2} = x$.
   Ответ: ________________.
6. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{a}{b}} - \sqrt{\dfrac{b}{a}} = \dfrac{5}{6}, \\ a - b = 10. \end{cases}$
   Ответ: ________________.
7. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = -2. \end{cases}$
   Ответ: ________________.
8. Решите систему уравнений $\begin{cases} a^2 + 3ab = 4b^2, \\ a^2 + b^2 + 9 = 3ab. \end{cases}$
   Ответ: ________________.

Вариант № 5

1. Найдите корни уравнения $(x-2)^2 = 13 - 4x$.
   Ответ: ________________.
2. Найдите многочлен наименьшей степени, среди корней которого есть числа 1, 2, 3 и коэффициент при старшей степени равен 1.
   Ответ: ________________.
3. Решите уравнение $(2x+1)^2 - (2x-2)(2+2x) = 17$.
   Ответ: ________________.
4. Найдите произведение корней уравнения $x^4 + 8x^3 + 14x^2 + 8x + 1 = 0$.
   Ответ: ________________.
5. Решите уравнение $(2x+1)(2x+3) - (2x-1)^2 = -22$.
   Ответ: ________________.

6. Решите уравнение $x^4 + x^3 - 11x^2 + x - 12 = 0$.
Ответ: ________________.

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3\sqrt{y} = \sqrt{x} + \sqrt{6}, \\ xy = 9. \end{cases}$
Ответ: ________________.

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x(y + 2z) = 34, \\ x(z - y) = 2, \\ y(x - z) = -20. \end{cases}$
Ответ: ________________.

Вариант № 6

1. Решите уравнение $x^2 = -2x + 3$.
Ответ: ________________.

2. Разделите многочлен $2x^4 - 14x^3 + 25x^2 - 7x + 12$ на многочлен $2x^2 + 1$.
Ответ: ________________.

3. Чему равно произведение всех различных корней уравнения $\sqrt{x^2 - 9} \cdot (x^2 - 4x + 4) = 0$?

1) -36 2) -18 3) -9 4) 6

4. Найдите все натуральные корни уравнения $\dfrac{3x^2 - 5}{x - 1} - \dfrac{7x + 6}{x + 2} = 2$.
Ответ: ________________.

5. Решите уравнение $\dfrac{2}{x^2 - x - 12} + \dfrac{6}{x^2 + 4x + 3} = \dfrac{1}{x + 3}$.
Ответ: ________________.

6. Решите уравнение $(3x + 1)^2 = 40 + 9(x - 1)(x + 2)$.
Ответ: ________________.

7. Найдите все решения уравнения $\dfrac{x^2 - 10}{x^2 + 2} + x^2 - 2 = 1$.
Ответ: ________________.

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ xy = 1. \end{cases}$
Ответ: ________________.

§ 21. Решение иррациональных уравнений и уравнений, содержащих неизвестное под знаком модуля

Основные сведения

Иррациональным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестное под знаком корня.

К простейшим иррациональным уравнениям относятся уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ и $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$.

Основные способы решения иррационального уравнения.

I. Переход к рациональному алгебраическому уравнению, которое либо равносильно исходному иррациональному уравнению, либо является его следствием.

1) Если обе части иррационального уравнения возвести в одну и ту же нечётную степень и освободиться от радикалов, то получится уравнение, равносильное исходному.

При возведении уравнения в чётную степень получается уравнение, являющееся следствием исходного. Так как при возведении в чётную степень чисел, равных по абсолютной величине, но разных по знаку, получается один и тот же результат, то возможно появление посторонних решений уравнения, но невозможна потеря корней.

Так как могут появиться посторонние корни, то необходимо делать проверку, подставляя найденные значения неизвестной в первоначальное уравнение.

2) От иррационального уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ можно перейти к равносильной ему системе:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

От иррационального уравнения вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ можно перейти к одной из равносильных ему систем:

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geqslant 0, \end{cases}$$

или

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Неравенство $g(x) \geqslant 0$ (или $f(x) \geqslant 0$) в этих системах выражает условие, при котором уравнение можно возводить в чётную степень, отсекает посторонние решения и позволяет обходиться без проверки.

II. Введение новой переменной.

Если в уравнении неоднократно встречается некоторое выражение, зависящее от неизвестной величины, то имеет смысл обозначить это выражение какой-нибудь новой переменной и попытаться решить уравнение сначала относительно введённой неизвестной, а затем уже найти исходную неизвестную.

III. Метод сведения к эквивалентным системам рациональных уравнений.

Уравнения вида $\sqrt{ax+b} \pm \sqrt{cx+d} = p$, где a, b, c, d — некоторые числа, часто удаётся решить при помощи введения двух вспомогательных неизвестных: $y = \sqrt{ax+b}$ и $z = \sqrt{cx+d}$, где $y, z \geqslant 0$ и последующего перехода к эквивалентной системе рациональных уравнений. Полученное уравнение будет содержать две неизвестных, которые зависят одна от другой посредством старой переменной x. С помощью преобразований можно получить систему двух уравнений относительно двух неизвестных y и z.

IV. Использование свойства монотонности функций.

Если уравнение имеет вид

$$f(x) = 0,$$

где $f(x)$ возрастает (убывает), или

$$f(x) = g(x),$$

где $f(x)$ и $g(x)$ «встречно монотонны», то есть $f(x)$ возрастает, а $g(x)$ убывает или наоборот, то такое уравнение имеет не более одного корня. Если удаётся привести уравнение к такому виду и найти корень, то он и будет решением данного уравнения. Во многих случаях корень такого уравнения удобно находить подбором.

Демонстрационный вариант

1. Решите уравнение $\sqrt{x-3} = 5$.

Решение. $\sqrt{x-3} = 5 \Leftrightarrow x - 3 = 25 \Leftrightarrow x = 28$.

Ответ: 28.

2. Найдите целые корни уравнения $\sqrt{5x+1} = x - 1$.

Решение. $\sqrt{5x+1} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+1=(x-1)^2, \\ x-1 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+1=x^2-2x+1, \\ x \geqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x=0, \\ x \geqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=7, \end{array}\right. \\ x \geqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 7.$

Ответ: 7.

3. Найдите сумму корней уравнения $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$.

Решение. $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x-4} = 1 + \sqrt{x+5} \Rightarrow$

$2x-4 = 1 + 2\sqrt{x+5} + x + 5 \Rightarrow 2\sqrt{x+5} = x - 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+20=x^2-20x+100, \\ x-10 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-24x+80=0, \\ x \geqslant 10; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=20, \\ x=4, \end{array}\right. \\ x \geqslant 10; \end{cases} \Leftrightarrow x = 20.$

Выполненные преобразования равносильны, значит, $x = 20$ — корень исходного уравнения.

Ответ: 20.

4. Решите уравнение $x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$.

Решение. Обозначим $\sqrt{x} = t,\ t \geqslant 0$.

Уравнение примет вид

$t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1, \\ t=3. \end{array}\right.$

$t = -1$ не удовлетворяет условию $t \geqslant 0$.

Вернёмся к исходной переменной: $\sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$.

Ответ: 9.

5. Решите уравнение $|2x+14| = 12$.

Решение. $|2x+14| = 12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+14=12, \\ 2x+14=-12; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=-13. \end{array}\right.$

Способ 2. Т.к. две части равенства неотрицательны, то можно возвести в квадрат: $|2x+14|^2 = 12^2$. Т.к. $|a|^2 = a^2$, то $4x^2 + 56x + 196 = 144$, $4x^2 + 56x + 52 = 0,\ x^2 + 14x + 13 = 0,\ x = -13,\ x = -1$.

Ответ: $-13; -1$.

6. Найдите разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $|x+1| + |x-5| = 20$.

Решение. 1) Найдём нули выражений, стоящих под знаком модуля.

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1;$

$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5.$

2) Решим уравнение на промежутках $(-\infty; -1)$, $[-1; 5]$ и $(5; +\infty)$.

а) $\begin{cases} x < -1, \\ -x - 1 + 5 - x = 20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ x = -8; \end{cases} \Leftrightarrow x = -8.$

б) $\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 5, \\ x + 1 + 5 - x = 20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 5, \\ 0 \cdot x = 14; \end{cases} \Rightarrow$ решений нет.

в) $\begin{cases} x > 5, \\ x + 1 + x - 5 = 20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5, \\ x = 12; \end{cases} \Leftrightarrow x = 12.$

Разность между наибольшим и наименьшим корнями исходного уравнения $12 - (-8) = 20$.

Ответ: 20.

7. Найдите корни уравнения $|x^2 + 2x - 3| = 2x + 6$, принадлежащие промежутку $(-3; 5]$.

Решение. Решим уравнение графически. Построим графики функций $y = |x^2 + 2x - 3|$ и $y = 2x + 6$.

1. Графиком функции $y = x^2 + 2x - 3$ является парабола, ветви которой направлены вверх ($a = 1 > 0$), вершина в точке с координатами $(x_0; y(x_0))$, где $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2} = -1$, $y(x_0) = y(-1) = 1 - 2 - 3 = -4$ (см. рис. 163).

Следовательно, $(-1; -4)$ — координаты вершины параболы. Нули функции: $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 1. \end{array} \right.$

2. Отразим часть параболы, расположенную ниже оси Ox, относительно этой оси.

3. Графиком функции $y = 2x + 6$ является прямая, проходящая через точки с координатами $(0; 6)$ и $(-3; 0)$.

4. Построенные графики имеют две общие точки, абсциссы которых $x = -1$ и $x = 3$ принадлежат промежутку $(-3; 5]$.

Проверка.

1) При подстановке значения $x = -1$ в исходное уравнение получим $|(-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3| = 4$, $2 \cdot (-1) + 6 = 4$.

$4 = 4$ — верно. Следовательно, $x = -1$ — корень исходного уравнения.

2) При подстановке значения $x = 3$, получим $|3^2 + 2 \cdot 3 - 3| = 12$, $2 \cdot 3 + 6 = 12$.

$12 = 12$ — верно. Следовательно, $x = 3$ — корень исходного уравнения. На промежутке $(-3; 5]$ заданное уравнение имеет корни $x = -1$, $x = 3$.

Ответ: $-1; 3$.

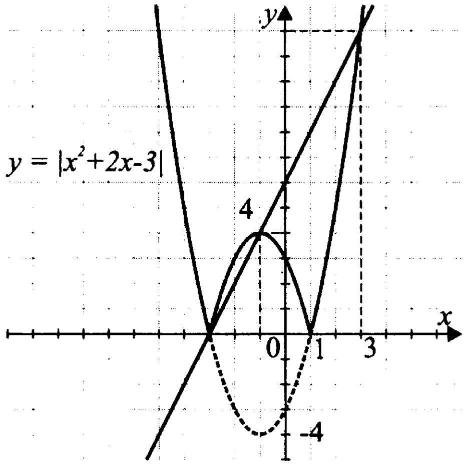


Рис. 163.

8. Найдите количество корней уравнения
$\sqrt{18x+1} = 7 - |6 - 3x|$.

Решение. Так как $\sqrt{18x+1} \geqslant 0$, то $7 - |6-3x| \geqslant 0 \Leftrightarrow |6-3x| \leqslant 7$
$-7 \leqslant 6 - 3x \leqslant 7 \Leftrightarrow -13 \leqslant -3x \leqslant 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{13}{3}$.

Следовательно, исходное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} 18x + 1 = 49 - 14|6-3x| + 36 - 36x + 9x^2, \\ -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{13}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 14|6-3x| = 9x^2 - 54x + 84, \\ -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{13}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14|2-x| = 3x^2 - 18x + 28, \\ -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{13}{3}. \end{cases}$$

Решим полученную систему на промежутках $\left[-\frac{1}{3}; 2\right]$ и $\left(2; \frac{13}{3}\right]$.

1) $\begin{cases} -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 2, \\ 28 - 14x = 3x^2 - 18x + 28; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 2, \\ 3x^2 - 4x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \frac{4}{3}. \end{array} \right.$

2) $\begin{cases} 2 < x \leqslant \frac{13}{3}, \\ 14x - 28 = 3x^2 - 18x + 28; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x \leqslant \frac{13}{3}, \\ 3x^2 - 32x + 56 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x \leqslant \dfrac{13}{3}, \\ x_{1,2} = \dfrac{16 \pm \sqrt{256 - 168}}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x \leqslant \dfrac{13}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{16 + \sqrt{88}}{3}, \\ x = \dfrac{16 - \sqrt{88}}{3}; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{16 - \sqrt{88}}{3}.$$

Следовательно, исходное уравнение имеет 3 корня.

Ответ: 3.

Вариант № 1

1. Решите уравнение $\sqrt{x+5} - \sqrt{2x-4} = 1$. Если уравнение имеет несколько корней, то в ответе запишите их произведение.

Ответ: ________________.

2. Решите уравнение $\sqrt{x^2 + x} = 2 - x$.

Ответ: ________________.

3. Сколько различных корней имеет уравнение $\sqrt{1-x} \cdot (x^4 - 5x^2 + 4) = 0$?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

4. Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения $1 + \sqrt{3x^2 - 2} = 2x$.

1) $[-1; 2]$ 2) $[0; 3)$ 3) $[1; 4)$ 4) $[5; 10]$

5. Решите уравнение $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1$.

Ответ: ________________.

6. Пусть x_0 — наименьший корень уравнения $\sqrt{6 - 4x - x^2} = x + 4$. Найдите $2 \cdot x_0 - 1$.

1) -3 2) -11 3) 9 4) уравнение корней не имеет

7. Найдите все целые корни уравнения, меньшие 3.

$$\frac{|4 - x^2|}{|x+2|} = |2 - |x||.$$

Ответ: ________________.

8. Найдите произведение корней уравнения $\sqrt{x^2 + \sqrt{3x^2 - 2}} = 2$.

Ответ: ________________.

Вариант № 2

1. Решите уравнение $x - 3 = \sqrt{9 - x}$.

Ответ: ________________.

2. Решите уравнение $\sqrt{x-3}=3-x$.

Ответ: ________________.

3. Чему равно произведение всех различных корней уравнения $\sqrt{x^2-9}\cdot(x^2-4x+4)=0$?

1) -36 2) -18 3) -9 4) 6

4. Решите уравнение $6(\sqrt{x})^2-12=4x$.

Ответ: ________________.

5. Найдите утроенное произведение корней уравнения $\sqrt{(3-x)^2}=\sqrt{(4x-1)^2}$.

Ответ: ________________.

6. Найдите наименьший корень уравнения $\left(2-\sqrt{3x-4}\right)\cdot\left(\sqrt{4x-1}-2\right)=0$.

1) $\frac{8}{3}$ 2) $\frac{1}{4}$ 3) 2 4) $\frac{5}{4}$

7. Решите уравнение $|2-x^2|=2$.

Ответ: ________________.

8. Решите уравнение $\sqrt{12x^2+4}=6x+10$.

Ответ: ________________.

Вариант № 3

1. Решите уравнение $\sqrt{3x+4}=7$.

Ответ: ________________.

2. Найдите все натуральные корни уравнения $\sqrt{5x+16}=x+2$.

Ответ: ________________.

3. Найдите сумму корней уравнения $\sqrt{3x+13}-\sqrt{x-8}=5$.

Ответ: ________________.

4. Решите уравнение $x+3\sqrt{x}-28=0$.

Ответ: ________________.

5. Решите уравнение $|5x+12|=8$.

Ответ: ________________.

6. Найдите разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $|3x-4|-|6-2x|=0$.

Ответ: ________________.

7. Решите уравнение $|2-x^2|=3$.

Ответ: ________________.

8. Найдите наибольший целочисленный корень уравнения $33-|6-3x|=\sqrt{x-3}$.

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. Решите уравнение $\sqrt{2x+5}=3$.
   Ответ: ________________.
2. Решите уравнение $\sqrt{4x-3}=2x-3$.
Если уравнение имеет несколько корней, то в ответе запишите их сумму.
   Ответ: ________________.
3. Решите уравнение $x+2\sqrt{x}=8$.
Если уравнение имеет несколько корней, то в ответе запишите их произведение.
   Ответ: ________________.
4. Решите уравнение $|2x+3|=5$.
Если уравнение имеет несколько корней, то в ответе запишите их сумму.
   Ответ: ________________.
5. Решите уравнение $|x+1|=3$
   Ответ: ________________.
6. Решите уравнение $|2x-5|-|3x-8|=0$.
Если уравнение имеет несколько корней, то в ответе запишите их сумму.
   Ответ: ________________.
7. Укажите все целочисленные корни уравнения $\sqrt{x+3}=3|x-2|-1$.
   Ответ: ________________.
8. Укажите количество рациональных корней уравнения
$\sqrt{x^2+6x-26}-1=2|3-x|$.
   Ответ: ________________.

Вариант № 5

1. Решите уравнение $\sqrt{7-2x}-3=0$.
   Ответ: ________________.
2. Найдите сумму корней уравнения $2x+1=\sqrt{61-10x}$.
   Ответ: ________________.
3. Решите уравнение $x+3\sqrt{x+3}-37=0$.
   Ответ: ________________.
4. Решите уравнение $\sqrt{3x+4}-x=\sqrt{x+2}+1$. Если уравнение имеет несколько корней, то в ответе запишите их произведение.
   Ответ: ________________.
5. Решите уравнение $|7-13x|=6$.
   Ответ: ________________.
6. Найдите сумму корней уравнения $||x+3|-1|=1$.
   Ответ: ________________.

7. Решите уравнение $|x-3|-|x+5|=2$.
Ответ: ________________.

8. Решите уравнение $4\sqrt{x-1}+5|x+2|=24$.
Ответ: ________________.

Вариант № 6

1. Найдите корни уравнения $|x^2-7x+10|=5x-25$, принадлежащие промежутку $(5;7]$.
Ответ: ________________.

2. Решите уравнение $2x-\sqrt{x^4-45}=0$.
Ответ: ________________.

3. Сколько различных корней имеет уравнение
$\sqrt{x-2}\cdot(x^6-8x^3+7)=0$?
1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

4. Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения
$\sqrt{2x^2-7x+21}-x=1$.
1) $(-\infty;-5)$ 2) $[0;5)$ 3) $(3{,}5;6]$ 4) $(10;15)$

5. Решите уравнение $\sqrt{5x+4}-\sqrt{x+3}=1$.
Ответ: ________________.

6. Пусть x_0 — неположительный корень уравнения
$\sqrt{1+4x-x^2}=x-1$. Найдите $3\cdot x_0+2$.
1) 2 2) -7
3) -1 4) неположительных корней нет

7. Найдите сумму всех целых корней уравнения, больших -10.
$$\frac{|x^2-9|}{||x|+3|}=|x+3|.$$
Ответ: ________________.

8. Найдите произведение корней уравнения $\sqrt{x^2-\sqrt{3x^2-2}}=2$.
Ответ: ________________.

§ 22. Задания, содержащие параметр

Основные сведения

Пусть дано уравнение вида $f(a, x) = g(a, x)$, где a, x — переменные величины.

Переменная a, которая при решении этого уравнения считается постоянной, называется **параметром**, а само уравнение — **уравнением, содержащим параметр**.

Решить уравнение (с переменной x и параметром a) — значит на множестве действительных чисел решить семейство уравнений, получаемых из данного при всех допустимых значениях параметра a.

Многие уравнения с параметром могут быть решены с помощью следующего алгоритма.

1) Определить ограничения, налагаемые на значения неизвестного x и параметра a, исходя из того, что функции $f(a, x)$ и $g(a, x)$ имеют смысл.

2) Определить формальные решения уравнения, записываемые без учёта ограничений. Если при решении возникают контрольные значения параметра, то их наносят на числовую ось Oa. Эти значения разбивают область допустимых значений параметра на подмножества. На каждом из подмножеств решают заданное уравнение.

3) Исключить те значения параметра, при которых формальные решения не удовлетворяют полученным ограничениям.

4) На числовую ось Oa добавить значения параметра, найденные в п. 3). Для каждого из промежутков на оси Oa записать все полученные решения в зависимости от значений параметра a.

5) Записать ответ, то есть решения в зависимости от значений параметра a.

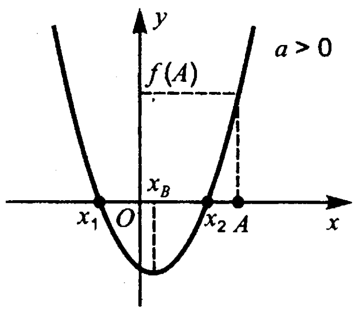
При решении заданий с параметрами часто встречаются задачи (или приводящие к ним) о расположении корней квадратного уравнения.

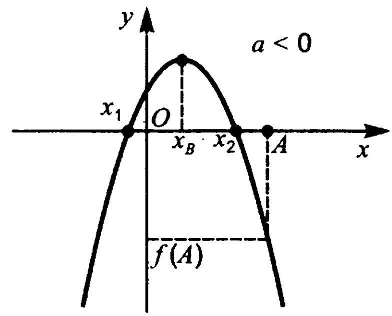
Пусть x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$ — корни квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$, у которого $D = b^2 - 4ac$, $a \neq 0$, $x_B = -\dfrac{b}{2a}$ и даны некоторые точки A и B оси Ox.

Утверждение 1. Оба корня меньше числа A, то есть $x_1 < A$ и $x_2 < A$, тогда и только тогда, когда

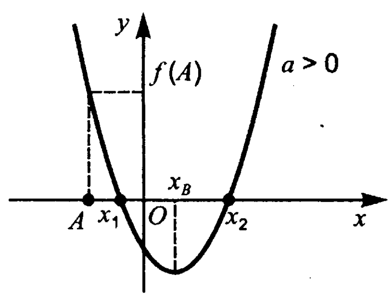
$$\begin{cases} D > 0, \\ a > 0, \\ x_B < A, \\ f(A) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} D > 0, \\ a < 0, \\ x_B < A, \\ f(A) < 0. \end{cases}$$

Графически эти условия можно представить следующим образом:





Если мы не будем учитывать третье неравенство $x_B < A$, то может получиться такая ситуация,



при которой выполняются все остальные неравенства системы, но не выполняется условие задачи.

Утверждение 2. Корни лежат по разные стороны от числа A, то есть $x_1 < A < x_2$, тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a > 0, \\ f(A) < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ f(A) > 0. \end{cases}$$

Утверждение 3. Оба корня больше числа A, то есть $x_1 > A$ и $x_2 > A$, тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0, \\ a > 0, \\ x_B > A, \\ f(A) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} D > 0, \\ a < 0, \\ x_B > A, \\ f(A) < 0. \end{cases}$$

Утверждение 4. Оба корня лежат между точками A и B, то есть $A < x_1 < B$ и $A < x_2 < B$, тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0, \\ a > 0, \\ A < x_B < B, \\ f(A) > 0, \\ f(B) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} D > 0, \\ a < 0, \\ A < x_B < B, \\ f(A) < 0, \\ f(B) < 0. \end{cases}$$

Утверждение 5. Корни лежат по разные стороны от отрезка $[A; B]$, то есть $x_1 < A < B < x_2$, тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a > 0, \\ f(A) < 0, \\ f(B) < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ f(A) > 0, \\ f(B) > 0. \end{cases}$$

Также довольно часто необходимо определить, при каком значении параметра m прямая $y = m$ имеет с графиком $y = f(x)$ ровно k корней. В этом случае необходимо построить график $y = f(x)$ и посмотреть, при каких m горизонтальная прямая $y = m$ имеет с построенным графиком указанное число корней.

Демонстрационный вариант

1. При каком положительном значении a функция $y = -2x^2 + 4ax + 7$ имеет наибольшее значение, равное 15?

Решение. Графиком функции $y = -2x^2 + 4ax + 7$ является парабола, ветви которой направлены вниз ($a = -2 < 0$), следовательно, наибольшее значение функция y принимает в вершине параболы.

Задача сводится к решению уравнения $y(x_0) = 15$, где x_0 — абсцисса вершины, $x_0 = \dfrac{-4a}{2 \cdot (-2)} = a$.

$-2a^2 + 4a \cdot a + 7 = 15 \Leftrightarrow 2a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow |a| = 2$.

По условию $a > 0$, значит, $a = 2$.

Ответ: 2.

2. При каких значениях k число 2 находится между корнями уравнения $2x^2 - \frac{1}{2}x + (k-3)(k+5) = 0$?

Решение. Графиком функции $y = 2x^2 - \frac{1}{2}x + (k-3)(k+5)$ является парабола, ветви которой направлены вверх ($a = 2 > 0$). Число 2 находится между корнями x_1 и x_2, если $y(2) < 0$ (см. рис. 164).

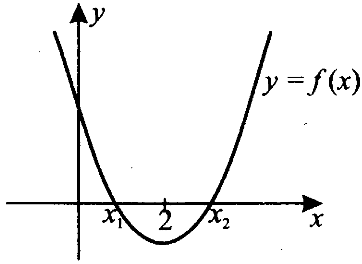


Рис. 164.

$$2 \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 + k^2 + 2k - 15 < 0,$$

$k^2 + 2k - 8 < 0.$

$(k+4)(k-2) < 0,\ k \in (-4; 2).$

Ответ: $(-4; 2)$.

3. При каких значениях параметра a уравнение $|x^2 - 6x + 4| = a$ имеет не меньше трёх решений?

Решение. Построим график функции $y = |x^2 - 6x + 4|$, зная, что графиком функции $y = (x-3)^2 - 5$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина параболы расположена в точке $(3; -5)$ (см. рис. 165).

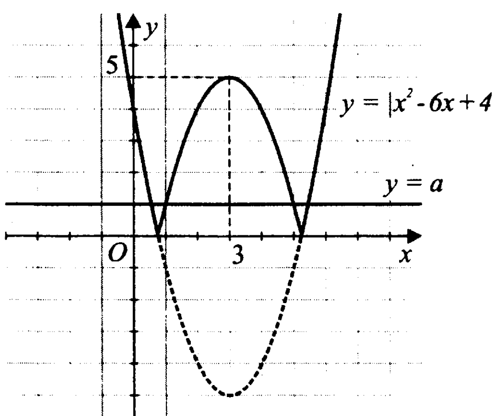


Рис. 165.

Графиком функции $y = a$ является горизонтальная прямая.

Очевидно, что при $a < 0$ корней нет.

Из графика видно, что при $a = 0$ и $a > 5$ уравнение имеет 2 корня. При $0 < a < 5$ уравнение имеет 4 корня.

При $a = 5$ уравнение имеет 3 корня.

Таким образом, не меньше трёх корней при $a \in (0;\ 5]$.

Ответ: $a \in (0;\ 5]$.

4. Найдите значения параметров k и b, при которых прямая $y = kx + b$ касается параболы $y = x^2 + bx$ и абсцисса точки касания равна 2.

Решение. Прямая касается параболы, следовательно, уравнение $kx + b = x^2 + bx$ имеет единственный корень, то есть дискриминант уравнения $x^2 + (b - k)x - b = 0$ равен нулю.

$D = (b - k)^2 + 4b = 0$. По условию абсцисса точки касания равна 2, значит, $x = 2$ — корень уравнения. То есть $4 + 2(b - k) - b = 0 \Leftrightarrow b = 2k - 4$. Найдём k и b, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} (b-k)^2 + 4b = 0, \\ b = 2k - 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (k-4)^2 + 4(2k-4) = 0, \\ b = 2k - 4; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - 8k + 16 + 8k - 16 = 0, \\ b = 2k - 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0, \\ b = -4. \end{cases}$$

Ответ: $k = 0,\ b = -4$.

5. Найдите множество значений параметра l, при которых число 2 находится между корнями уравнения $9x^2 - 6x - (l - 2)(l + 2) = 3$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$9x^2 - 6x - (l - 2)(l + 2) - 3 = 0$.

Если квадратный трёхчлен, стоящий в левой части равенства, имеет корни, то решение задачи сводится к решению неравенства $y(2) < 0$, где $y = 9x^2 - 6x - (l - 2)(l + 2) - 3$.

$y(2) = 9 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 - l^2 + 4 - 3 = 25 - l^2$; $25 - l^2 < 0$; $|l| > 5$; $l \in (-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.

Вариант № 1

1. При каких значениях параметра a областью определения функции $y = \dfrac{\sqrt{x + 3a}}{3x - a}$ является промежуток $[15; +\infty)$?

Ответ: ________________.

2. При каких значениях параметра p уравнение $4x^2 + p = 0$ имеет два различных действительных корня?

Ответ: ________________.

3. Постройте график функции $y = \dfrac{x^4 - 20x^2 + 64}{(x + 4)(x - 2)}$ и определите, при каких значениях параметра c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: ________________.

4. Постройте график функции $y = x^2 - 8|x| + 13$. Какое наибольшее число общих точек может иметь график данной функции с прямой, параллельной оси абсцисс?

Ответ: ________________.

5. При каких значениях k прямая $y = kx + 5$ не имеет общих точек ни с параболой $y = -2x^2 - 2x + 3$, ни с параболой $y = x^2 + 5x + 21$?

Ответ: ________________.

Вариант № 2

1. При каких значениях параметра a неравенство $x^2 + 1 \leqslant a$ не имеет действительных решений?

Ответ: ________________.

2. При каком наибольшем целом значении параметра a уравнение $x\sqrt{x+3} + a\sqrt{x+3} = 0$ имеет два различных действительных корня?

Ответ: ________________.

3. Постройте график функции $y = \dfrac{(x^2 - 3x - 10)(x - 6)}{x - 5}$ и определите, при каких значениях параметра u прямая $y = u$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: ________________.

4. Постройте график функции $y = \dfrac{(x^2 + 2x)|x + 2|}{x}$ и определите, при каких значениях параметра k прямая $y = k$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: ________________.

5. При каких значениях p графики функций $y = px^2 - 24x + 1$ и $y = 12x^2 - 2px - 1$ пересекаются в двух точках?

Ответ: ________________.

Вариант № 3

1. При каком положительном значении a функция $y = x^2 + 3ax + 0{,}01$ имеет наименьшее значение, равное $-2{,}24$?

Ответ: ________________.

2. При каких значениях параметра p уравнение $x^2 + 5x + 2p = 0$ не имеет действительных корней?

Ответ: ________________.

3. Постройте график функции $y = |x^2 + 2x - 15|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Ответ: ________________.

4. Найдите все значения m, при каждом из которых прямая $y = mx$ имеет с графиком функции $y = -2x^2 - 8$ ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.

Ответ: ________________.

5. При каких значениях a число 3 заключено между корнями уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$?

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. При каких значениях параметра t уравнение $16x^2 + t = 0$ имеет ровно один действительный корень?

Ответ: ________________.

2. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $4x^2 - 4(a - 2)x + 25 > 0$ выполняется для любого значения x.

Ответ: ________________.

3. Постройте график функции $y = 4 - \dfrac{4x^3 + x^4}{2x^2 + 8x}$ и определите, при каких значениях параметра k прямая $y = k$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Ответ: ________________.

4. Определите, при каких значениях параметра m прямая $y = 2x+7$ имеет с графиком функции $y = x^2 + m$ ровно одну общую точку. Постройте график этой функции при найденном значении m.

Ответ: ________________.

5. Найдите все целые значения a, при которых вершина параболы $y = 2x^2 + ax + 1$ лежит выше прямой $y = x$.

Ответ: ________________.

Вариант № 5

1. При каких значениях параметра a неравенство $x^4 \leqslant a$ имеет хотя бы одно действительное решение?

Ответ: ________________.

2. При каких значениях параметра k прямая $y = kx + 1$ пересекает параболу $y = 2x^2 + 5x + 3$ ровно в одной точке?

Ответ: ________________.

3. Постройте график функции $y = \frac{1}{2}\left(\left|3x - \frac{12}{x}\right| + 3x + \frac{12}{x}\right)$ и определите, при каких значениях параметра k прямая $y = k$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку.

Ответ: ________________.

4. Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 - 6x + 11, & x \geqslant 1, \\ 2x + 4, & x < 1 \end{cases}$ и определите, при каких значениях параметра s прямая $y = s$ имеет с этим графиком ровно две общие точки.

Ответ: ________________.

5. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2 - ax + x = 0$ принадлежат промежутку $[-2; 2]$?

Ответ: ________________.

Вариант № 6

1. При каких значениях параметра a неравенство $x^6 + 3 \leqslant a$ не имеет действительных решений?

Ответ: ________________.

2. При каких неположительных значениях k прямая $y = x + k + 1$ пересекает окружность $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ в двух точках?

Ответ: ________________.

3. Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 - 6x + 9, & x \leqslant 6, \\ y = \dfrac{54}{x}, & x > 6 \end{cases}$ и определите, при каких значениях параметра h прямая $y = h$ имеет с этим графиком одну или две общие точки.

Ответ: ________________.

4. Постройте график функции $y = -x|x| + 4|x| - 2x$ и определите, при каких значениях параметра d прямая $y = d$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Ответ: ________________.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^2 + 2(a - 3)x - a^2 + 1 = 0$ имеет корни, один из которых меньше -1, другой — больше 2.

Ответ: ________________.

§ 23. Геометрия. Базовый уровень

Параллельные прямые.

Свойства и признаки параллельных прямых.

1. **Аксиома параллельных.** Через данную точку можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

2. Если две прямые параллельны одной и той же прямой, то они параллельны между собой.

3. Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.

4. Если две параллельные прямые пересечь третьей, то образованные при этом внутренние накрест лежащие углы равны, соответственные углы равны, односторонние углы в сумме составляют 180°.

5. Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные внутренние накрест лежащие углы, то прямые параллельны.

6. Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные соответственные углы, то прямые параллельны.

7. Если при пересечении двух прямых третьей сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

Теорема Фалеса.

Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла, то на второй стороне угла отложатся также равные отрезки.

Теорема о пропорциональных отрезках.

Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, высекают на них пропорциональные отрезки.

Треугольник.

Признаки равенства треугольников.

1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то треугольники равны.

2. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то треугольники равны.

3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то треугольники равны.

Признаки равенства прямоугольных треугольников.

1. По двум катетам.
2. По катету и гипотенузе.
3. По гипотенузе и острому углу.
4. По катету и острому углу.

Теорема о сумме углов треугольника и следствия из неё.

1. Сумма углов треугольника равна 180°.

2. Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

3. Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.

4. Углы со взаимно перпендикулярными сторонами равны, если они оба острые или оба тупые (на рис. 166 $\angle 1 = \angle 2$).

5. Угол между биссектрисами смежных углов равен 90°.

6. Биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей перпендикулярны (на рис. 167 прямые $a \parallel b$, $m \perp n$).

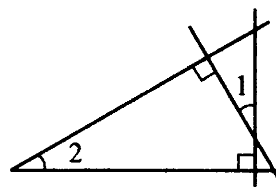


Рис. 166.

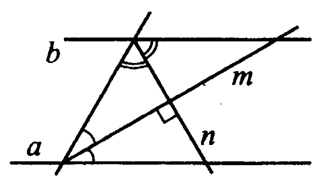


Рис. 167.

Основные свойства и признаки равнобедренного треугольника.

1. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

2. Если два угла треугольника равны, то он равнобедренный.

3. В равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведённые к основанию, совпадают.

4. Если в треугольнике совпадает любая пара отрезков из тройки медиана, биссектриса, высота, то он является равнобедренным.

Неравенство треугольника и следствия из него.

1. Сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны.

2. Сумма звеньев ломаной больше отрезка, соединяющего начало первого звена с концом последнего.

3. Против большего угла треугольника лежит бóльшая сторона.

4. Против большей стороны треугольника лежит больший угол.

5. Гипотенуза прямоугольного треугольника больше катета.

6. Если из одной точки проведены к прямой перпендикуляр и наклонные, то

1) перпендикуляр короче наклонных;

2) большей наклонной соответствует бóльшая проекция и наоборот.

Средняя линия треугольника.

Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется средней линией треугольника.

Теорема о средней линии треугольника. Средняя линия треугольника параллельна стороне треугольника и равна её половине.

Теоремы о медианах треугольника.

1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины.

2. Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

3. Медиана делит треугольник на два равновеликих (равных по площади) треугольника.

4. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

Свойство серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, описанной около треугольника.

Теорема о высотах треугольника.

Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Теорема о биссектрисах треугольника.

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник.

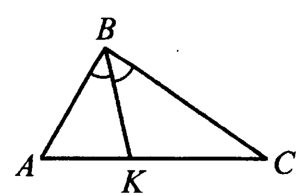


Рис. 168.

Свойство биссектрисы треугольника.

Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам (на рис. 168 выполняется $\frac{AK}{AB} = \frac{KC}{BC}$).

Признаки подобия треугольников.

1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны.

2. Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого, а углы, заключённые между этими сторонами, равны, то треугольники подобны.

3. Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трём сторонам другого, то треугольники подобны.

Площади подобных треугольников.

1. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

2. Если два треугольника имеют равные углы, то их площади относятся как произведения сторон, заключающих эти углы.

Прямоугольный треугольник.

1. В прямоугольном треугольнике (см. рис. 169) тригонометрические функции задаются следующим образом:

$\sin\angle A = \dfrac{BC}{AB}$, $\cos\angle A = \dfrac{AC}{AB}$, $\mathrm{tg}\,\angle A = \dfrac{BC}{AC}$.

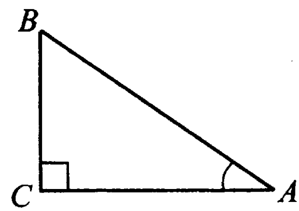


Рис. 169.

2. Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего или на косинус прилежащего к этому катету острого угла (см. рис. 169, $BC = AB\cdot\sin\angle A$, $BC = AB\cdot\cos\angle B$).

3. Катет прямоугольного треугольника равен другому катету, умноженному на тангенс противолежащего или котангенс прилежащего к этому катету острого угла (см. рис. 169, $BC = AC\cdot\mathrm{tg}\,\angle A$).

4. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

5. Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, противолежащий этому катету, равен 30°.

6. $R = \dfrac{c}{2}$; $r = \dfrac{a+b-c}{2} = p - c$, где a, b — катеты, а c — гипотенуза прямоугольного треугольника; r и R — радиусы вписанной и описанной окружности соответственно.

Теорема Пифагора и теорема, обратная теореме Пифагора.

1. Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов.

2. Если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то треугольник — прямоугольный.

Средние пропорциональные в прямоугольном треугольнике.

Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное проекций катетов на гипотенузу, а каждый катет есть среднее пропорциональное гипотенузы и своей проекции на гипотенузу.

Метрические соотношения в треугольнике.

1. **Теорема синусов** (см. рис. 170).

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R.$$

2. **Теорема косинусов** (см. рис. 170).

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\angle A.$$

3. **Следствие из теоремы косинусов.** Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

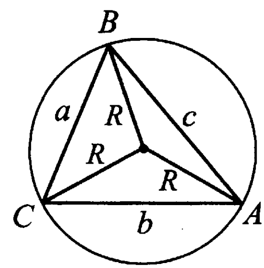


Рис. 170.

Формулы площади треугольника.

Пусть дан треугольник (см. рис. 171), r и R — радиусы его вписанной и описанной окружностей (соответственно), $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр.

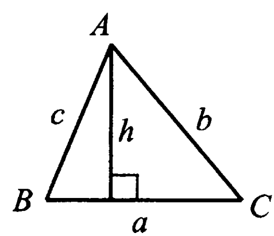


Рис. 171.

1. $S = \frac{1}{2}ah.$ **2.** $S = \frac{1}{2}ab\cdot\sin\angle C.$

3. $S = pr.$ **4.** $S = \frac{abc}{4R}.$

5. Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$

Элементы равностороннего треугольника.

Пусть h, S, r, R — высота, площадь, радиусы вписанной и описанной окружностей равностороннего треугольника со стороной a. Тогда

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2};\quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6};\quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3};\quad R = 2r;\quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Параллелограмм.

Параллелограммом называется четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

Свойства и признаки параллелограмма.

1. Диагональ разбивает параллелограмм на два равных треугольника.
2. Противоположные стороны параллелограмма попарно равны.
3. Противоположные углы параллелограмма попарно равны.
4. Диагонали параллелограмма пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.
5. Если противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.
6. Если две противоположные стороны четырёхугольника равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.
7. Если диагонали четырёхугольника делятся точкой пересечения пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Свойство середин сторон четырёхугольника.

Середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма, площадь которого равна половине площади четырёхугольника.

Прямоугольник.

Прямоугольником называется параллелограмм с прямым углом.

Свойства и признаки прямоугольника.

1. Диагонали прямоугольника равны.
2. Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Квадрат.

Квадратом называется прямоугольник, все стороны которого равны.

Ромб.

Ромбом называется четырёхугольник, все стороны которого равны.

Свойства и признаки ромба.

1. Диагонали ромба перпендикулярны.
2. Диагонали ромба делят его углы пополам.
3. Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.
4. Если диагонали параллелограмма делят его углы пополам, то этот параллелограмм — ромб.

Трапеция.

Трапецией называется четырёхугольник, у которого только две противоположные стороны (основания) параллельны. Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины непараллельных сторон (боковых сторон).

1. **Теорема о средней линии трапеции.** Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

2. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности её оснований.

Замечательное свойство трапеции.

Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

Равнобедренная трапеция.

Трапеция называется равнобедренной, если её боковые стороны равны.

Свойства и признаки равнобедренной трапеции.

1. Углы при основании равнобедренной трапеции равны.
2. Диагонали равнобедренной трапеции равны.
3. Если углы при основании трапеции равны, то она равнобедренная.
4. Если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная.
5. Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований.

Формулы площади четырёхугольника.

1. Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту ($S = ah$).
2. Площадь параллелограмма равна произведению его соседних сторон на синус угла между ними ($S = ab \cdot \sin\alpha$).
3. Площадь прямоугольника равна произведению двух его соседних сторон ($S = ab$).
4. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей ($S = \frac{d_1 d_2}{2}$).
5. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту ($S = \frac{a+b}{2}h$).

6. Площадь четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними ($S = \frac{d_1 d_2}{2} \cdot \sin\gamma$).

7. Формула Герона для четырёхугольника, около которого можно описать окружность:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где a, b, c, d — стороны этого четырёхугольника, p — полупериметр, а S — площадь.

Подобные фигуры.

1. Отношение соответствующих линейных элементов подобных фигур равно коэффициенту подобия.

2. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

Правильный многоугольник.

Пусть a_n — сторона правильного n-угольника, а r_n и R_n — радиусы вписанной и описанной окружностей. Тогда:

$$a_n = 2R_n \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}; \;\; a_n = 2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n} \cdot r_n; \;\; r_n = R_n \cdot \cos\frac{180^\circ}{n}.$$

Окружность.

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, удалённых от данной точки, называемой центром окружности, на одно и то же положительное расстояние.

Основные свойства окружности.

1. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит хорду и стягиваемые ею дуги пополам.

2. Диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде.

3. Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности.

4. Равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния.

5. Хорды окружности, удалённые от центра на равные расстояния, равны.

6. Окружность симметрична относительно любого своего диаметра.

7. Дуги окружности, заключённые между параллельными хордами, равны.

8. Из двух хорд больше та, которая менее удалена от центра.

9. Диаметр есть наибольшая хорда окружности.

Замечательные свойства окружности.

1. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под прямым углом ($\angle AMB = 90°$), есть окружность с диаметром AB без точек A и B.

2. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под острым углом ($\angle AMB < 90°$), есть внешность круга с диаметром AB без точек прямой AB.

3. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под тупым углом ($\angle AMB > 90°$), есть внутренность круга с диаметром AB без точек отрезка AB.

4. Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, есть две дуги равных окружностей (без концов этих дуг).

Касательная к окружности.

Прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку, называется касательной к окружности.

1. Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

2. Если прямая, проходящая через точку на окружности, перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку, то эта прямая — касательная к окружности.

3. Если прямые, проходящие через точку M, касаются окружности в точках A и B, то $MA = MB$ и $\angle AMO = \angle BMO$, где точка O — центр окружности (см. рис. 172).

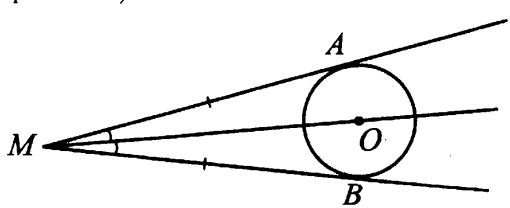


Рис. 172.

4. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.

Касающиеся окружности.

Говорят, что две окружности касаются, если они имеют единственную общую точку (точку касания).

1. Точка касания двух окружностей лежит на их линии центров.

2. Окружности радиусов r и R с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом тогда и только тогда, когда $R + r = O_1O_2$.

3. Окружности радиусов r и R $(r < R)$ с центрами O_1 и O_2 касаются внутренним образом тогда и только тогда, когда $R - r = O_1O_2$.

4. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K (см. рис. 173). Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках A и B и пересекается с общей касательной, проходящей через точку K, в точке C. Тогда $\angle AKB = 90°$ и $\angle O_1CO_2 = 90°$.

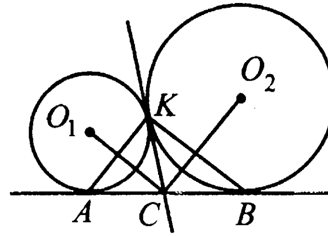


Рис. 173.

5. Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен отрезку общей внутренней касательной, заключённому между общими внешними. Оба эти отрезка равны $2\sqrt{Rr}$ (см. рис. 174: $AC = BD = MN = 2\sqrt{Rr}$).

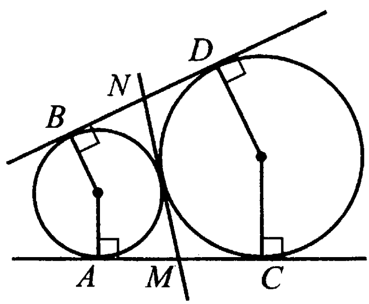


Рис. 174.

Углы, связанные с окружностью.

1. Величина дуги окружности равна величине центрального угла, на неё опирающегося.

2. Вписанный угол равен половине угловой величины дуги, на которую он опирается.

3. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

4. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами (см. рис. 175: $\angle ANC = \dfrac{\smile AC + \smile BD}{2}$).

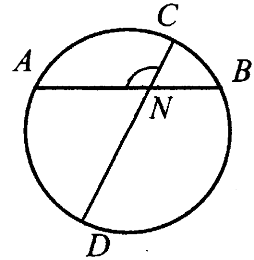


Рис. 175.

5. Угол между двумя секущими, пересекающимися вне круга, равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности (см. рис. 176: $\angle ABC = \dfrac{\smile AC - \smile DE}{2}$).

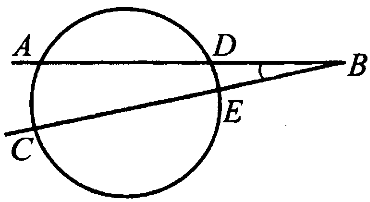


Рис. 176

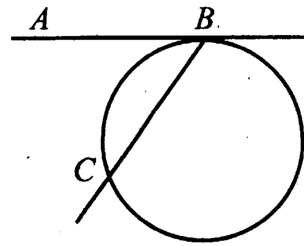


Рис. 177

6. Угол между касательной и хордой, проведённой из точки касания, равен половине угловой величины дуги, высекаемой на окружности этой хордой (см. рис. 177: $\angle ABC = \frac{1}{2}\smile BC$).

Свойства хорд окружности.

1. Линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде.

2. Произведения длин отрезков хорд AB и CD окружности, пересекающихся в точке E, равны, то есть $AE \cdot EB = CE \cdot ED$ (см. рис. 178).

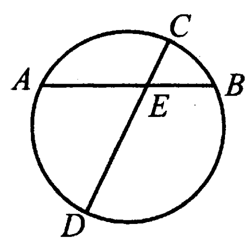


Рис. 178.

Вписанные и описанные окружности.

1. Центры вписанной и описанной окружностей правильного треугольника совпадают.

2. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, — это середина гипотенузы.

3. Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.

4. Если четырёхугольник можно вписать в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180°.

5. Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°, то около него можно описать окружность.

6. Если в трапецию можно вписать окружность, то боковая сторона трапеции видна из центра окружности под прямым углом.

7. Если в трапецию можно вписать окружность, то радиус окружности есть среднее пропорциональное отрезков, на которые точка касания делит боковую сторону.

8. Если в многоугольник можно вписать окружность, то его площадь равна произведению полупериметра многоугольника на радиус этой окружности.

Теорема о касательной и секущей и следствие из неё.

1. Если из одной точки проведены к окружности касательная и секущая, то произведение всей секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной (см. рис. 179: $AB^2 = AD{\cdot}AC$).

2. Произведение всей секущей на её внешнюю часть для данной точки и данной окружности постоянно.

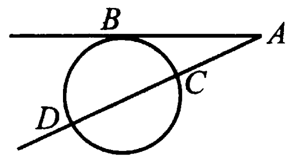


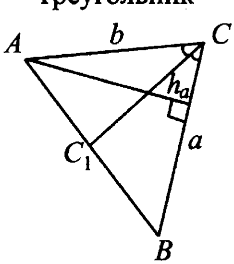
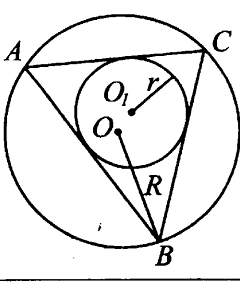
Рис. 179.

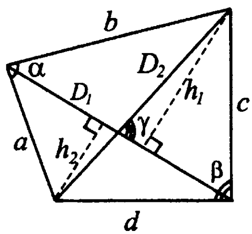
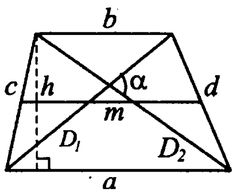
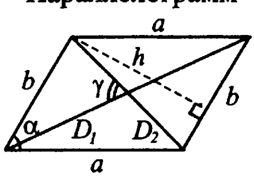
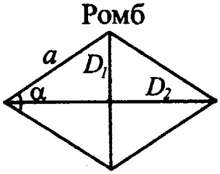
Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.

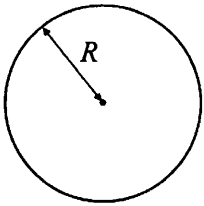
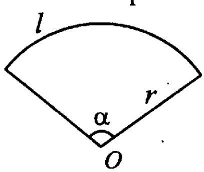
Площадь круга радиуса R равна πR^2.

Основные формулы

Далее S — площадь фигуры, P — периметр, p — полупериметр.

Чертежи	Обозначения	Формулы
Треугольник  	a, b, c — стороны; A, B, C — противолежащие им углы; h_a — высота, проведённая к стороне a; r — радиус вписанной окружности; R — радиус описанной окружности; CC_1 — биссектриса угла C.	$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin C$ $S = pr = \frac{abc}{4R}$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $\frac{AC}{AC_1} = \frac{CB}{BC_1}$

Чертежи	Обозначения	Формулы
Четырёхугольник 	a, b, c, d — стороны; D_1, D_2 — диагонали; γ — угол между диагоналями; h_1, h_2 — длины перпендикуляров, опущенных на диагональ D_1;	$S = \dfrac{h_1 + h_2}{2} D_1$ $S = \dfrac{1}{2} D_1 D_2 \sin\gamma$
Трапеция 	a, b — основания; c, d — боковые стороны; D_1, D_2 — диагонали; α — угол между диагоналями; m — средняя линия; h — высота.	$m = \dfrac{1}{2}(a + b)$ $P = 2m + c + d$ $S = \dfrac{1}{2}(a + b)h = mh$ $S = \dfrac{1}{2} D_1 D_2 \sin\alpha$
Параллелограмм 	a, b — стороны; h — расстояние между сторонами, равными b; α — угол параллелограмма; D_1, D_2 — диагонали; γ — угол между диагоналями.	$S = bh$ $S = ab\sin\alpha$ $S = \dfrac{1}{2} D_1 D_2 \sin\gamma$
Ромб 	a — сторона; α — угол ромба; D_1, D_2 — диагонали.	$S = a^2 \sin\alpha$ $S = \dfrac{1}{2} D_1 D_2$
Правильный многоугольник 	n — число сторон; a — сторона; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; $\alpha = 180° - 2\gamma$ — угол многоугольника $\left(\gamma = \dfrac{180°}{n}\right)$.	$a = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ $P = na$ $P = 2nR\sin\gamma = 2nr\,\mathrm{tg}\,\gamma$ $S = \dfrac{1}{4} na^2 \,\mathrm{ctg}\,\gamma$ $S = nr^2 \,\mathrm{tg}\,\gamma$ $S = \dfrac{1}{2} nR^2 \sin 2\gamma$ $S = \dfrac{1}{2} nar$

Чертежи	Обозначения	Формулы
Круг 	R — радиус; l — длина окружности.	$S = \pi R^2$ $l = 2\pi R$
Круговой сектор 	r — радиус; α — центральный угол (в градусах); $l = \frac{\pi\alpha}{180} r$ — длина дуги.	$P = l + 2r$ $S = \frac{lr}{2}$ $S = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}$

Демонстрационный вариант

1. Угол C трапеции $ABCD$ (см. рис. 180) в 3 раза больше угла D. Найдите градусную меру угла D.

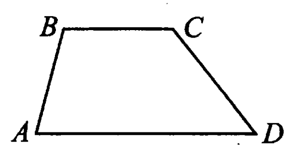


Рис. 180.

Решение. Пусть $\angle D = x°$, тогда $\angle C = (3x)°$. $\angle C + \angle D = 180°$ как сумма углов трапеции, прилежащих к боковой стороне. Следовательно, $3x + x = 180$; $x = 45$. То есть, $\angle D = 45°$.

Ответ: 45.

2. Укажите номера верных утверждений.

1) Если три угла одного треугольника равны трём углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

2) Сумма острых углов любого треугольника равна 180°.

3) Медианы любого треугольника пересекаются в одной точке.

4) Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен его гипотенузе.

Решение. Рассмотрим каждое из утверждений.

1) Первое утверждение неверно, так как если три угла одного треугольника равны трём углам другого треугольника, то треугольники подобны, но при этом не обязательно равны.

2) Второе утверждение неверно. Например, в случае, если один из углов треугольника равен $90°$, то сумма его острых углов равна $90°$; если один из углов треугольника тупой, то сумма его острых углов меньше $90°$.

3) Утверждение верно.

4) Последнее утверждение неверно, так как радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен половине его гипотенузы.

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

3. Периметр равнобедренного треугольника равен 36, а основание равно 10. Найдите его площадь.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC, у которого $AC = 10$, $AB = BC$, $AB + BC + CA = 36$ (см. рис. 181).
Значит, $AB + BC = 2AB = 36 - AC = 26$, $AB = 13$. Т.к. $\triangle ABC$ равнобедренный, то высота BH будет одновременно являться медианой и биссектрисой. Тогда $AH = HC = 5$. Найдём BH из прямоугольного треугольника ABH по теореме Пифагора. $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} =$

$$= \sqrt{169 - 25} = 12, \ S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = 5 \cdot 12 = 60.$$

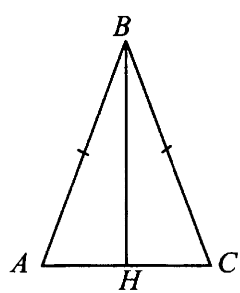


Рис. 181.

Ответ: 60.

4. Найдите площадь квадрата, описанного вокруг окружности радиуса 7 (см. рис. 182).

Решение. Заметим, что сторона квадрата равна диаметру вписанной окружности и равна 14. Тогда площадь квадрата равна $14^2 = 196$.

Ответ: 196.

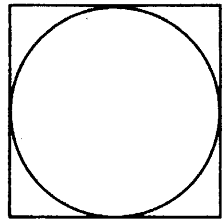


Рис. 182.

5. Диагональ прямоугольника образует угол 70° с одной из его сторон. Найдите угол между диагоналями этого прямоугольника. Ответ дайте в градусах.

Решение. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$, у которого диагонали пересекаются в точке O (см. рис. 183). Пусть $\angle OBA = 70°$. Заметим, что $AO = OC = BO = OD$, так как диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам. Но тогда $\angle OAB = \angle OBA = 70°$ как углы при основании равнобедренного треугольника.
$\angle BOA = 180° - \angle OAB - \angle OBA = 40°$.

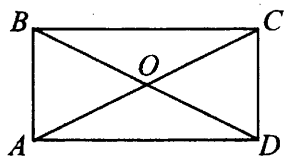


Рис. 183.

Ответ: 40.

6. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 12. Точка E — середина стороны BC. Найдите площадь $ABED$.

Решение. Пусть h — длина высоты параллелограмма, перпендикулярной стороне BC (см. рис. 184). Тогда площадь $S_{ABCD} = BC \cdot h = 12$, при этом $S_{ECD} = \frac{1}{2}EC \cdot h = \frac{1}{4}BC \cdot h = \frac{1}{4}S_{ABCD} = 3$. Далее
$S_{ABED} = S_{ABCD} - S_{ECD} = 12 - 3 = 9$.

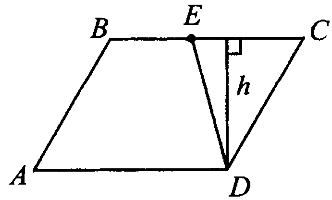


Рис. 184.

Ответ: 9.

7. Человек ростом 1,8 м стоит на расстоянии 6 метров от фонарного столба и отбрасывает тень длиной 9 м (см. рис. 185). Определите высоту фонарного столба (в метрах).

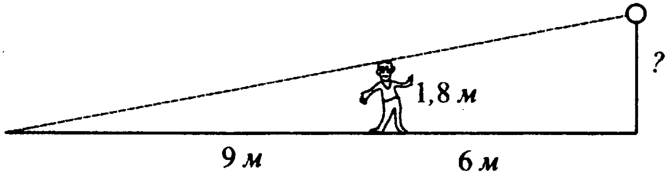


Рис. 185.

Решение. Рассмотрим треугольники ABC и ADE (см. рис. 186). Они подобны по двум углам ($\angle BCA = \angle DEA = 90°$, $\angle A$ — общий). Тогда $\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE}$, $\frac{1{,}8}{9} = \frac{DE}{15}$, откуда $DE = 3$. Высота фонарного столба равна 3 м.

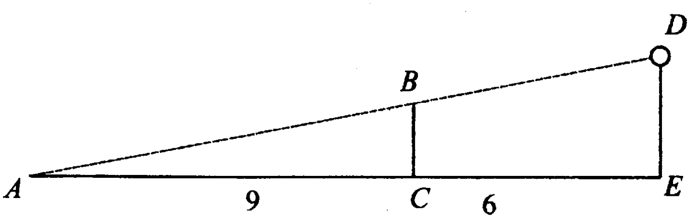


Рис. 186.

Ответ: 3.

8. Сколько потребуется плиток размером 15 см × 25 см, чтобы покрыть пол в магазине размером 9 м × 10 м? (Схема укладки пола изображена на рисунке 187)

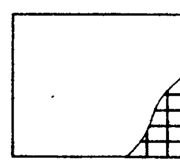


Рис. 187.

Решение. 15 см = 0,15 м; 25 см = 0,25 м. Следовательно, укладывая плитку согласно схеме, по длине пола потребуется $\frac{10}{0{,}25} = 40$ плиток, а по ширине — $\frac{9}{0{,}15} = 60$ плиток.

Значит, всего потребуется $40 \cdot 60 = 2400$ штук.

Ответ: 2400.

Вариант № 1

1. В треугольнике ABC угол A в 2 раза больше угла B и в 3 раза меньше угла C (см. рис. 188). Найдите его градусную меру.

Ответ: ________________.

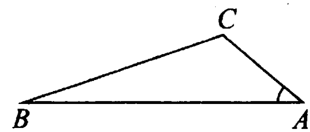


Рис. 188.

2. Укажите номера неверных утверждений.

1) Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

2) Угол, вписанный в окружность, измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

3) Сумма длин двух сторон треугольника может быть равна длине третьей стороны.

Ответ: ________________.

3. Площадь прямоугольного треугольника равна $882\sqrt{3}$. Один из острых углов равен 60°. Найдите длину гипотенузы.

Ответ: ________________.

4. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Найдите градусную меру угла B треугольника ABC, если угол AOC равен 84°.

Ответ: ________________.

5. Сумма двух углов равнобедренной трапеции равна 110°. Найдите меньший угол трапеции. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________.

6. Площадь одной клетки равна 1. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке 189.

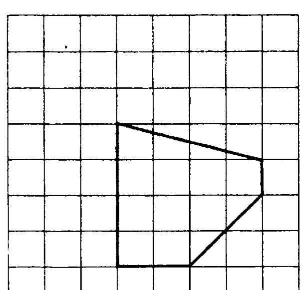


Рис. 189.

Ответ: ________________.

7. Проектор полностью освещает экран A высотой 150 см, расположенный на расстоянии 200 см от проектора (см. рис. 190). На каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) от проектора нужно расположить экран B высотой 420 см, чтобы он был полностью освещён, если настройки проектора остаются неизменными?

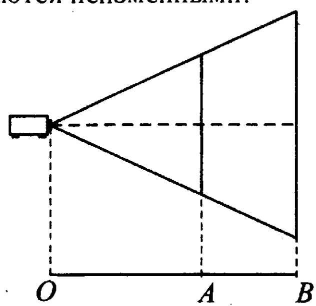


Рис. 190.

Ответ: ________________.

8. Пол на кухне разбит на маленькие равные квадраты, некоторые из них чёрного цвета (см. рис. 191). Какое минимальное количество квадратов чёрного цвета нужно ещё приклеить на пол, чтобы полученная фигура стала симметричной относительно диагонали кухни — прямой AB?

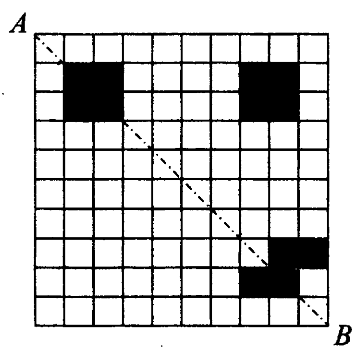


Рис. 191.

Ответ: ________________.

Вариант № 2

1. В прямоугольной трапеции больший угол при меньшем основании равен 160° (см. рис. 192). Найдите градусную меру меньшего угла при большем основании.

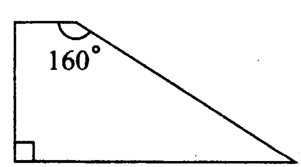


Рис. 192.

Ответ: ________________.

2. Выберите из правой колонки корректное продолжение для каждого утверждения из левой колонки.

1) Длина катета, лежащего против угла в 30°, составляет …	А) $\frac{1}{2}$ длины гипотенузы;
2) Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, составляет …	Б) $\frac{1}{3}$ длины гипотенузы;
3) Квадратный корень из суммы квадратов длин катетов составляет …	В) длину гипотенузы.

Ответ:

1	2	3

3. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна $15\sqrt{2}$, а один из острых углов равен 45°. Найдите площадь треугольника.

Ответ: ________________.

4. В треугольнике ABC $AC = 40$, $BC = 9$, угол C равен 90°. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.

Ответ: ________________.

5. Периметр ромба равен 60, а один из углов равен 30°. Найдите площадь ромба.

Ответ: ________________.

6. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 193).

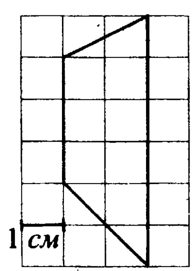


Рис. 193.

Ответ: ________________.

7. Пешеход и велосипедист одновременно отправились из посёлка в разных направлениях: один на север, другой на запад. Скорости их равны соответственно 5 км/ч и 12 км/ч. Какое расстояние (в километрах) будет между ними через 4 часа?

Ответ: ________________.

8. Колесо имеет 12 спиц (см. рис. 194). Сколько осей симметрии имеет колесо?

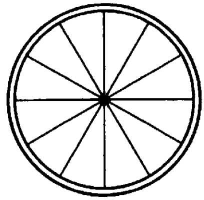


Рис. 194.

Ответ: ________________.

Вариант № 3

1. Найдите градусную меру угла A треугольника ABC, если $BC = 15$, $AB = 12$, $AC = 9$ (см. рис. 195).

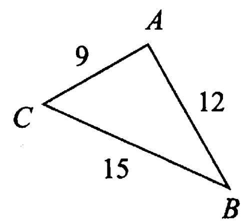


Рис. 195.

Ответ: ________________.

2. Укажите номер верного продолжения следующего утверждения: «Градусные меры центрального и вписанного углов, опирающихся на одну дугу, ...»

1) равны
2) относятся соответственно как 2 : 1
3) относятся соответственно как 1 : 2
4) никак не связаны

Ответ: ________________.

3. Площадь равнобедренного треугольника равна $9\sqrt{3}$. Угол, лежащий против основания, равен $60°$. Найдите длину боковой стороны треугольника.

Ответ: ________________.

4. В окружности с центром O AB и CD — диаметры. Центральный угол BOC равен $110°$. Найдите вписанный угол BAD. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________.

5. Основания трапеции равны 20 и 12, одна из боковых сторон равна $5\sqrt{2}$, а угол между ней и одним из оснований равен $135°$. Найдите площадь трапеции.

Ответ: ________________.

6. Найдите угол ABC (см. рис. 196). Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________.

7. Сколько спиц в колесе, если угол между соседними спицами равен $36°$?

Ответ: ________________.

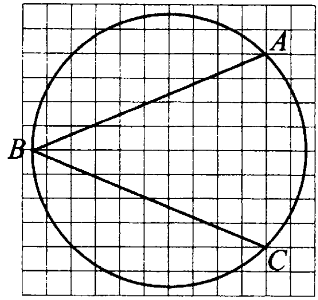


Рис. 196.

8. Сколько нужно кубиков, чтобы построить пирамидку, изображённую на рисунке 197?

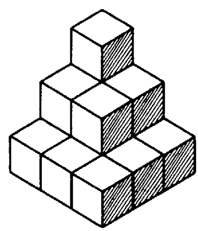


Рис. 197.

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. Чему равен угол при основании равнобедренного треугольника, если угол при его вершине равен 80° (см. рис. 198)? Ответ укажите в градусах.

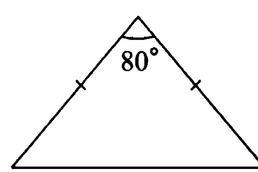


Рис. 198.

Ответ: ________________.

2. Укажите номер верного утверждения.

1) Квадрат гипотенузы равен сумме катетов.

2) Медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении 3 : 1.

3) При пересечении двух параллельных прямых третьей накрест лежащие углы равны.

4) В ромбе все углы равны.

Ответ: ________________.

3. В треугольнике со сторонами 22 и 6 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой стороне, равна 3. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?

Ответ: ________________.

4. К окружности с центром в точке O проведены касательная EF и секущая EO. Найдите радиус окружности, если $EF = 7$, $EO = 25$.

Ответ: ________________.

5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $AB = AD$, $BC = CD$, $\angle A = 70°$, $\angle C = 100°$. Найдите угол B. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________.

6. Найдите тангенс угла AOC (см. рис. 199).

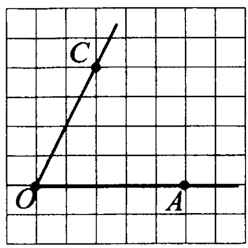


Рис. 199.

Ответ: ________________.

7. Пол комнаты, имеющей форму прямоугольника со сторонами 4 м и 7 м, требуется покрыть паркетом из прямоугольных дощечек со сторонами 7 см и 20 см. Сколько потребуется таких дощечек?

Ответ: ________________.

8. Карточку, изображённую на рисунке 200, повернули на 90° по часовой стрелке.

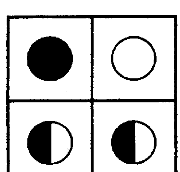


Рис. 200.

Какая из карточек, изображённых на рисунке 201, при этом получилась?

Ответ: ________________.

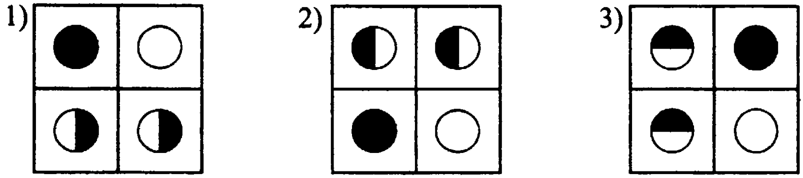


Рис. 201.

Вариант № 5

1. В ромбе $ABCD$ угол A на 30° больше угла B. Найдите градусную меру угла C (см. рис. 202).

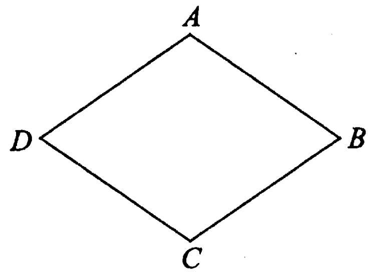


Рис. 202.

Ответ: ________________.

2. Укажите номера утверждений, которые могут стать справедливыми для конкретных построений.

1) В треугольнике ABC $AB = 8$, $AC = BC = 4$.

2) В равнобедренной трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами AB и DC $\angle A = \angle B$.

3) Угол при вершине равнобедренного треугольника в 2 раза больше угла при основании.

4) Гипотенуза прямоугольного треугольника в 2 раза больше каждого из его катетов.

Ответ: ________________.

3. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AC = 12$, $tgA = \frac{1}{3}$. Найдите BC.

Ответ: ________________.

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ADB равен 34°, угол BDC равен 86°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________ .

5. В прямоугольнике одна сторона равна 5, а диагональ равна 13. Найдите площадь прямоугольника.

Ответ: ________________ .

6. В треугольнике MNP отмечены середины E и F сторон MN и NP соответственно (см. рис. 203). Площадь треугольника ENF равна 35. Найдите площадь четырёхугольника $MEFP$.

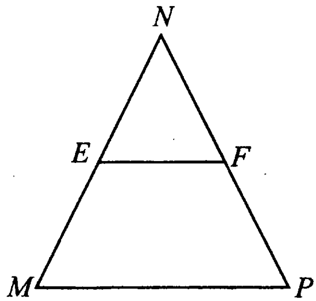


Рис. 203.

7. Человек ростом 1,7 м стоит на расстоянии 15 м от столба, на котором висит фонарь на высоте 6,8 м. Найдите длину тени человека в метрах.

8. Сколько всего равносторонних треугольников изображено на рисунке 204?

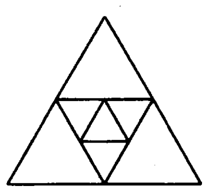


Рис. 204.

Ответ: ________________ .

Вариант № 6

1. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен 10° (см. рис. 205). Найдите градусную меру угла при вершине, противолежащей основанию.

Ответ: ________________ .

2. Укажите номера утверждений, которые не являются верными ни для какого построения.

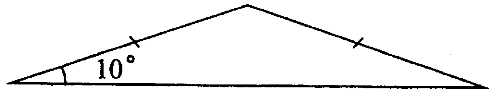


Рис. 205.

1) Длина гипотенузы равна длине катета.

2) Сумма длин катетов численно равна квадрату гипотенузы.

3) Биссектриса острого угла трапеции перпендикулярна к боковому ребру.

4) Окружность вписана в прямоугольник, не являющийся квадратом.

Ответ: ________________.

3. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\sin A = \frac{4}{5}$, $AC = 12$. Найдите AB.

Ответ: ________________.

4. AB и CD — диаметры окружности с центром O. Угол ABD равен 86°. Найдите угол BOC. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________.

5. Периметр квадрата равен 44. Найдите его площадь.

Ответ: ________________.

6. В треугольнике MNP проведена EF — средняя линия (см. рис. 206). Площадь треугольника EFN равна 68. Найдите площадь треугольника MNP.

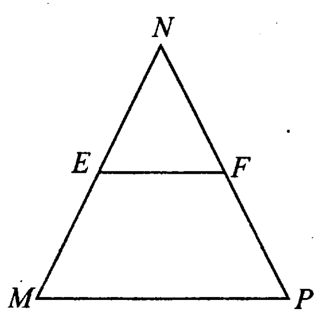


Рис. 206.

Ответ: ________________.

7. Какой угол (в градусах) образуют минутная и часовая стрелка в 8 : 00?

Ответ: ________________.

8. Сколько всего квадратов изображено на рисунке 207?

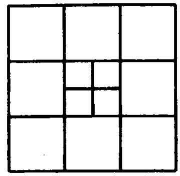


Рис. 207.

Ответ: ________________ .

§ 24. Геометрия. Профильный уровень

Демонстрационный вариант

1. AB и CD — диаметры окружности. Докажите равенство треугольников ABD и ACD (см. рис. 208).

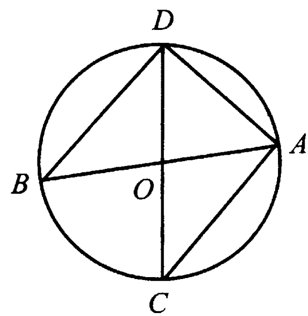


Рис. 208.

Решение. Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$.

$AB = CD$ как диаметры одной окружности; $\angle BDA = \angle CAD = 90°$ как вписанные углы, опирающиеся на диаметры; $\angle ABD = \angle DCA$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу AD.

Следовательно, $\triangle ABD = \triangle ACD$ по гипотенузе и острому углу.

2. Две стороны треугольника равны 1 см и $\sqrt{15}$ см, а медиана к третьей стороне равна 2 см. Найдите третью сторону треугольника.

Решение.

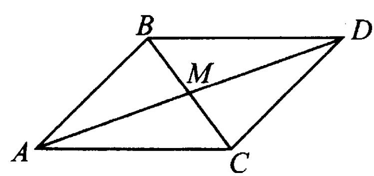


Рис. 209.

Рассмотрим треугольник ABC и его медиану AM (см. рис. 209). Пусть А$B = 1$, $AC = \sqrt{15}$ и $AM = 2$. Достроим треугольник до параллелограмма $ABDC$, заметим, что $BD = AC = \sqrt{15}$, $AD = 2AM = 4$. По свойству параллелограмма $AD^2 + BC^2 = 2(AB^2 + BD^2)$, отсюда $16 + BC^2 = 2(1 + 15)$, $BC^2 = 16$, $BC = 4$.

Ответ: 4.

3. В параллелограмме $ABCD$ длина отрезка AB равна 4. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке K, а продолжение стороны CD в точке E. Найдите длину отрезка KC, если $EC = 1$.

Решение. 1) $\angle 1 = \angle 2$, так как AK — биссектриса угла A (см. рис. 210). $\angle 2 = \angle 3$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AK. Отсюда, $\angle 1 = \angle 3$. Значит, $\triangle ABK$ — равнобедренный, $BK = AB = 4$.

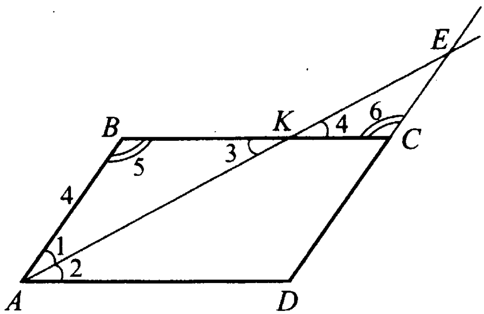


Рис. 210.

2) $\triangle ABK \sim \triangle ECK$ по первому признаку подобия ($\angle 3 = \angle 4$ как вертикальные, $\angle 5 = \angle 6$ как накрест лежащие при параллельных сторонах AB и CD и секущей BC).

Значит, $KC = EC = 1$.

Ответ: 1.

4. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) точки M и N — середины боковых сторон. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MBN, если периметр треугольника ABC равен 32, а длина отрезка MN равна 6.

Решение. 1) Точки M и N — середины сторон AB и BC, значит, MN — средняя линия $\triangle ABC$, $MN = \frac{1}{2}AC$, $AC = 6 \cdot 2 = 12$ (см. рис. 211).

$$AB = BC = \frac{P_{ABC} - AC}{2} = \frac{32 - 12}{2} = 10,$$

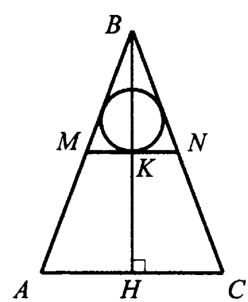


Рис. 211.

2) BH — высота треугольника ABC.
По теореме Пифагора
$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

3) $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$,

4) $\triangle MBN \sim \triangle ABC$ по II признаку подобия $\left(\angle B \text{ — общий, } \frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}\right)$,

$\frac{P_{MBN}}{P_{ABC}} = \frac{1}{2}$, $P_{MBN} = \frac{1}{2}P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 32 = 16$. $\frac{S_{MBN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$,

$S_{MBN} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot 48 = 12$.

$S_{MBN} = \frac{1}{2} r P_{MBN}$, где r — радиус окружности, вписанной в $\triangle MBN$,

$r = \frac{2S_{MBN}}{P_{MBN}} = \frac{2 \cdot 12}{16} = 1{,}5.$

Ответ: 1,5.

5. Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 9 и 17. Найдите диаметр этой окружности, если расстояние между серединами хорд равно 5.

Решение. Точки M и N — середины хорд AB и AC соответственно, значит, MN — средняя линия $\triangle ABC$ (см. рис. 212).

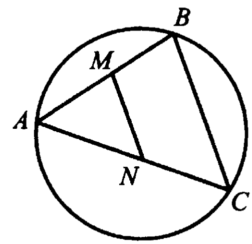


Рис. 212.

$MN = \frac{1}{2} BC$, $BC = 2MN = 2 \cdot 5 = 10.$

Периметр $P_{ABC} = 17 + 9 + 10 = 36$,

полупериметр $p = \frac{1}{2} P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18.$

Следовательно, $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$
$= \sqrt{18(18-10)(18-17)(18-9)} = 36.$

Так как $S_{ABC} = \frac{abc}{4R}$, то $R = \frac{abc}{4S} = \frac{9 \cdot 17 \cdot 10}{4 \cdot 36} = 10{,}625.$

Диаметр равен $2 \cdot 10{,}625 = 21{,}25$.

Ответ: 21,25.

Вариант № 1

1. Отрезки AB и CD лежат на параллельных прямых, AD и BC пересекаются в точке O, при этом $BO = OC$. Докажите равенство треугольников AOB и COD.

2. В треугольнике ABC проведена медиана AD (см. рис. 213). Найдите BL, если AL — высота треугольника и $AB = 1$ см, $AC = \sqrt{15}$ см, $AD = 2$ см.

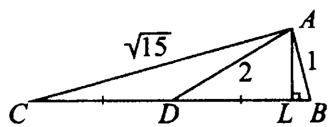


Рис. 213.

Ответ: ________________.

3. В равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, а средняя линия равна 4 см (см. рис. 214). Найдите высоту трапеции.

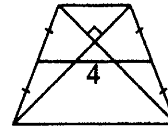


Рис. 214.

Ответ: ______________.

4. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = BC)$ длина средней линии MN равна 6 $(M \in AB,\ N \in BC)$, а $\sin \angle BAC = \frac{4}{5}$ (см. рис. 215). Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MBN.

Ответ: ______________.

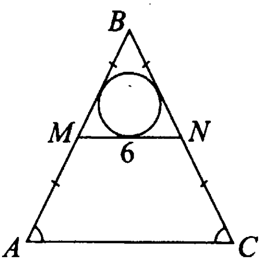


Рис. 215.

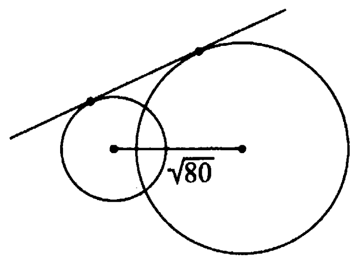


Рис. 216.

5. Центры двух окружностей находятся на расстоянии $\sqrt{80}$. Радиусы окружностей равны 4 и 8 (см. рис. 216). Найдите длину отрезка общей касательной.

Ответ: ______________.

Вариант № 2

1. Докажите, что медианы, проведённые к боковым сторонам равнобедренного треугольника, равны.

2. В прямоугольном треугольнике ABC $(\angle C = 90°)$ проведена медиана CD, длина которой 2,5 см. Найдите периметр треугольника, если один из катетов на 1 см меньше гипотенузы (см. рис. 217).

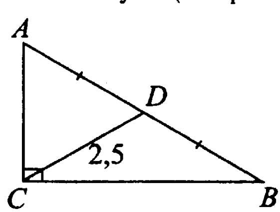


Рис. 217.

Ответ: ______________.

3. В параллелограмме сторона и бо́льшая диагональ равны соответственно 3 и $\sqrt{37}$. Найдите периметр параллелограмма, если его острый угол равен 60° (см. рис. 218).

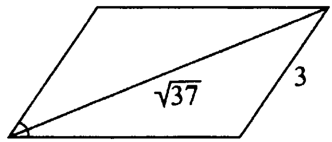


Рис. 218.

Ответ: ________________.

4. Длина одного из катетов прямоугольного треугольника равна 12. Расстояние от центра описанной около этого треугольника окружности до этого катета равно 2,5 (см. рис. 219). Найдите радиус вписанной в этот треугольник окружности.

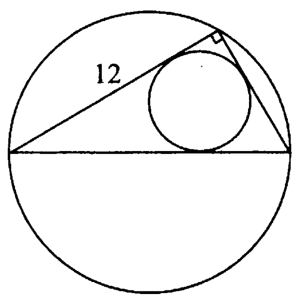


Рис. 219.

Ответ: ________________.

5. К окружности проведена касательная AB (B — точка касания). Прямая AC пересекает окружность в точках C и D (см. рис. 220). Найдите AD, если $AC = 1$, $AB = \sqrt{3}$.

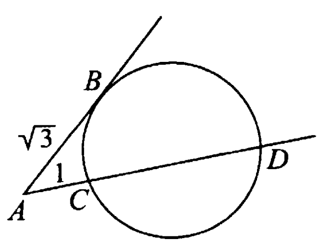


Рис. 220.

Ответ: ________________.

Вариант № 3

1. В четырёхугольнике диагонали перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам. Докажите, что данный четырёхугольник — ромб.

2. В треугольнике MNP проведена медиана MD. Найдите её длину, если $MN = 1$, $MP = \sqrt{15}$ и $\cos\angle MNP = \frac{1}{4}$ (см. рис. 221).

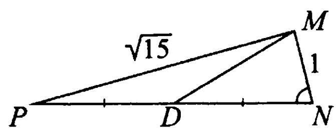


Рис. 221.

Ответ: ________________.

3. Сторона ромба равна 5 см, а длины диагоналей относятся как 4 : 3 (см. рис. 222). Найдите сумму длин диагоналей ромба.

Ответ: ________________.

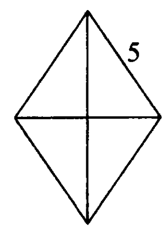


Рис. 222.

4. Тангенс острого угла BAC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) равен $\frac{5}{12}$, а расстояние от центра описанной около этого треугольника окружности до катета AC равно 2,5 (см. рис. 223). Найдите периметр этого треугольника.

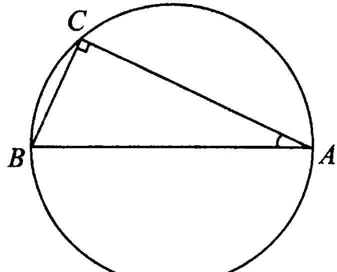


Рис. 223.

Ответ: ________________.

5. К окружности проведена касательная AB (B — точка касания). Прямая AM проходит через центр окружности и пересекает её в точках M и

N (см. рис. 224). Найдите квадрат расстояния от точки B до прямой AN, если $AM = 1$, $AB = \sqrt{3}$.

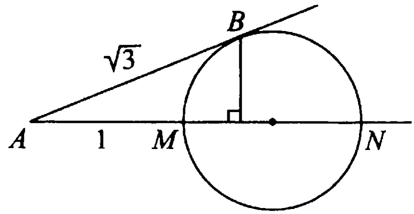


Рис. 224.

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина BC (см. рис. 225). Докажите, что треугольник AMD равнобедренный.

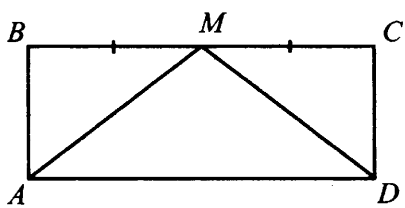


Рис. 225.

2. Длины двух сторон треугольника равны 27 и 29. Длина медианы, проведённой к третьей стороне, равна 26 (см. рис. 226). Найдите высоту треугольника, проведённую к стороне длиной 27.

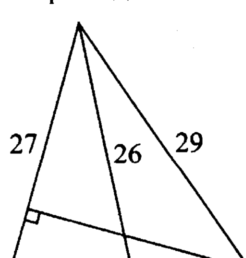


Рис. 226.

Ответ: ________________.

3. Длины двух сторон остроугольного треугольника равны $\sqrt{10}$ и $\sqrt{13}$ (см. рис. 227). Найдите длину третьей стороны, если она равна длине проведённой к ней высоты.

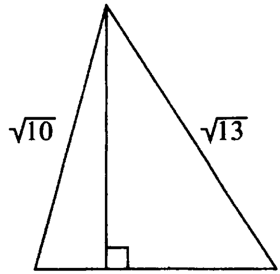


Рис. 227.

Ответ: ________________.

4. Около круга радиусом 2 описана равнобедренная трапеция с острым углом 30° (см. рис. 228). Найдите длину средней линии трапеции.

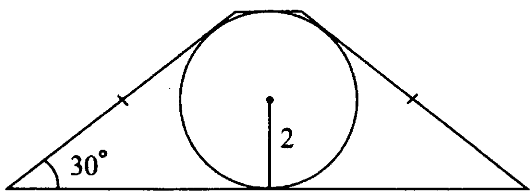


Рис. 228.

Ответ: ________________.

5. В окружности радиусом 17,5 проведены диаметр AB, хорды AC и BC, перпендикуляр CD к диаметру AB (см. рис. 229). Найдите сумму длин хорд AC и BC, если $AC : AD = 5 : 3$.

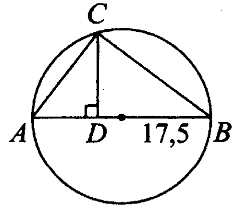


Рис. 229.

Ответ: ________________.

Вариант № 5

1. В треугольнике ABC $AB = 5$, $AC = 2$, $BC = 4$. Точка K лежит на стороне BC, и $BK = 1$, точка M лежит на стороне AB и $BM = 1{,}25$ (см. рис. 230). Докажите, что $MK \| AC$.

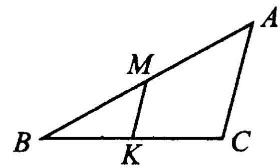


Рис. 230.

2. В равнобедренном треугольнике проведена медиана к боковой стороне, равной 4 (см. рис. 231). Найдите квадрат длины основания треугольника, если длина медианы равна 3.

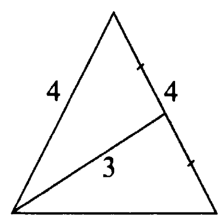


Рис. 231.

Ответ: ________________ .

3. Периметр параллелограмма 90, а острый угол — 60°. Диагональ параллелограмма (см. рис. 232) делит его тупой угол на части в отношении 1 : 3. Найдите бóльшую сторону параллелограмма.

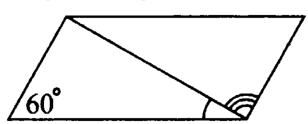


Рис. 232.

Ответ: ________________ .

4. Около круга описана равнобочная трапеция, средняя линия которой равна 10 (см. рис. 233). Определите периметр трапеции.

Ответ: ________________ .

5. Из точки, данной на окружности, проведены две взаимно перпендикулярные хорды. Отрезок, соединяющий их середины, равен 6 (см. рис. 234). Найдите радиус окружности.

Ответ: ________________ .

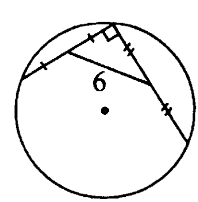


Рис. 234.

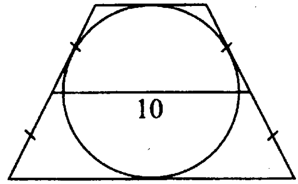


Рис. 233.

Вариант № 6

1. Треугольник MNK образован средними линиями треугольника ABC (см. рис. 235). Докажите, что все его углы равны соответствующим углам треугольника ABC.

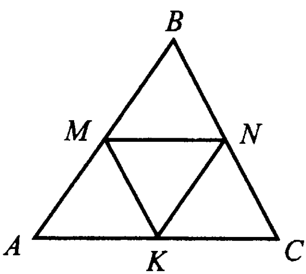


Рис. 235.

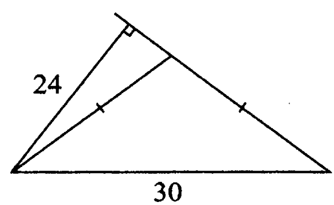


Рис. 236.

2. Основание равнобедренного треугольника равно 30, а высота, проведённая к боковой стороне, равна 24 (см. рис. 236). Найдите длину боковой стороны.

Ответ: ________________.

3. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса тупого угла B пересекает сторону AD в точке F. Найдите периметр параллелограмма, если $AB = 12$ и $AF : FD = 4 : 3$ (см. рис. 237).

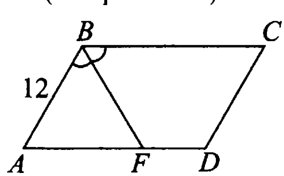


Рис. 237.

Ответ: ________________.

4. Около окружности описана равнобочная трапеция, средняя линия которой равна 5, а синус острого угла при основании равен $\frac{4}{5}$ (см. рис. 238). Найдите площадь трапеции.

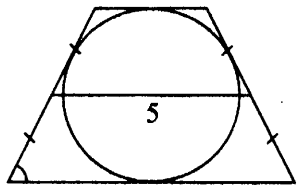


Рис. 238.

Ответ: ________________.

5. Окружность касается двух смежных сторон квадрата и делит каждую из двух других его сторон на отрезки, равные 2 и 23 (см. рис. 239). Найдите радиус окружности.

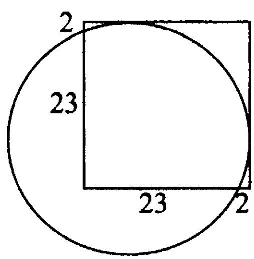


Рис. 239.

Ответ: ________________.

Ответы

§ 1. Приближённые значения. Округление чисел. Стандартный вид числа

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	3	313	0,455	3	500,36	2	17,17
2	283,66	3	4	6000,26	4	3	1	1
3	4	4	630	30,029	4	0,5	2	4,1
4	2	3	3	700,603	2	3,75	4	4,2
5	3	1	1801	4000,52	6,8	1	0,1	2
6	0,012	3	3	3	2	27	800,013	3

§ 2. Отношения. Пропорции

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	1	2	4,2	4	0,75	715	6
2	4	3	0,6	250	2	45	4	4
3	3	4	3	7,5	2	7	100	108
4	4	2	4	0,6	3	20	48	60
5	3	4	2	3	3	300	4,16	1
6	4	3	4	66	1	8	16	0,2

§ 3. Проценты

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	1	4	3	48000	221000	25,74	70
2	2	3	1	57,6	20	1056	1,5	133
3	3	4	3	140	30	20	20	8820
4	1	2	2	416	45	6	126	766500
5	4	2	2	200	600	4	20160	12500
6	1	2	4	80	155	20	16	216

§ 4. Арифметические действия. Сравнение чисел

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	5	3	3	2	3	241	4	5
2	1	3	3, 9	3	1	3	4	4
3	−2	4	2	3	1	412	2	5
4	0, 08	4	2	3	1	314	3	2
5	10, 5	1	1	2	4	142	3	5
6	2	2	4	0, 75	2	3	2	4

§ 5. Числовые подстановки в буквенные выражения. Формулы

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2, 3	1	15600	341	2	3	0, 96	215, 6
2	19	1	2	1	370	132, 25	20	4000
3	0	3	25	243	4	3	21600	0, 0008
4	1	$\pi = \frac{C}{2R}$	4	2, 1	2	2	12	230
5	9	$v = \sqrt{a_{н}R}$	2	14700	1	4	280	25
6	1,8	$m = \frac{F}{a}$	4	2	1, 92	44	3528	0, 072

§ 6. Степень с целым показателем

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	3	2	4	1	3	314
2	4	2	2	2	4	3	3	241
3	2	2	3	1	3	1	4	421
4	2	3	4	3	1	4	1	412
5	4	3	1	3	3	2	2	312
6	4	2	3	3	1	2	2	312

§ 7. Многочлены. Преобразование выражений

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	1	1	3	4	4	132
2	2	0	3	4	−16	3	−95	3
3	2	3	1	4	1	3	4	413
4	4	4	4	3	4	2	3	1
5	1	4	4	2	2	2	4	3
6	1	3	4	4	1	6	36	4

§ 8. Алгебраические дроби. Преобразования рациональных выражений

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\frac{5}{x}$	3	1	$0; 1$	234	2	3	$-0,06$
2	$\frac{x^2-2}{2x}$	1	2	213	1	2	a	$-6,1$
3	$\frac{4-3x^2}{x}$	3	213	2	1	2	a	$-2,5$
4	$\frac{x+1}{x}$	2	324	1	3	4	4	$-a$
5	$\frac{1-3x}{3x}$	1	$-4; 0; 1$	214	$\frac{-5b}{a^2+2ab+b^2}$	2	$0,21$	2
6	$2x^2+x$	1	2	234	1	−0,01	$3-2x$	−1

§ 9. Квадратные корни

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	3	3	2	3	3	2	7
2	1	4	4	4	4	1	4	4
3	2	3	3	1	4	−2	2	−1
4	2	2	1	1	1	1	3	$x-2$
5	2	1	3	1	2	1	1	$2x+1$
6	4	2	2	8	4	4	3	−8

§ 10. Линейные и квадратные уравнения

Вар. №	Номер задания 1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	2	$-1;\ 3$	$0;\ 1$	2	$-0{,}05$	-1	123
2	3	$-1; -2$	-4	3	1	0	46,5	213
3	$-0{,}3$	3	-2	13	4	$-6; -4$	$2; -2{,}25$	213
4	1	$-2; 5$	3	4	$(3x+1)(x+4)$	$-0{,}5; 0$	$-2{,}16; 2$	314
5	2	4	$-0{,}25$	$-0{,}75; 4$	$(5x-3)(2x+3)$	$0; 2{,}5$	$-1{,}5; 0; 1{,}5$	142
6	1	$-2;\ 3$	1	$0;\ 1{,}3$	$-0{,}5; 0{,}5$	1	$\pm 5;\ 0$	123

§ 11. Системы двух уравнений с двумя неизвестными

Вар. №	Номер задания 1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	231	2	$(3; 2)$	3	3	$0;$ $x = 2;$ $y = -1$	314
2	4	231	2	$\left(\frac{8}{13}; \frac{4}{13}\right)$	2	4	$(-4; -5)$, $(6; 5)$	$(1; 1)$, $(-1; -1)$
3	2	213	4	$(2; 2)$	3	2	$(3; 1)$, $(9; 13)$	$(4; 10)$
4	3	3	4	$(1; 3)$	1	4	$(3; 25)$, $(-3; -17)$	241
5	1	2	3	$(-4; 6)$	3	$-3{,}2$	$(0; 3)$, $(-3; 0)$	214
6	2	2	1	$\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$	2	1	$(5; 70)$, $(-5; -40)$	$(0{,}5; -5)$

§ 12. Неравенства с одной переменной и системы неравенств

Вар.	Номер задания							
№	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$[5; +\infty)$	2	4	$[4; 10)$	4	3	2	213
2	$[3; +\infty)$	3	3	$[-4; 2]$	1	$(-\infty; -4]$	4	3
3	$(-\infty; 9]$	2	1	$[-1; 2]$	2	$(8; +\infty)$	4	2
4	4	2	4	3	4	$[1; 4,5]$	3	$(-\infty; 5]$
5	$[1; +\infty)$	1	4	$[1; +\infty)$	2	4	$(-14; 2]$	431
6	$x > \frac{1}{x}$	$(-\infty; 0,2)$	1	$(-\infty; 0,6]$	4	$[-4; 0,5)$	1	$[5,5; +\infty)$

§ 13. Решение квадратных неравенств. Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Системы неравенств

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$(-7;3)$	$(-\infty;1)\cup$ $\cup(2;+\infty)$	23	3	$[-3;7]$	$[1;7]$	1	$[-1;1]$
2	$(-3;3)$	$(-1;3)$	$[0;9]$	3	$[-3;-1)$	1	$[-2;0)$	$(-1;1)\cup$ $\cup(1;+\infty)$
3	$[-3;2]$	$(-4;0)$	1	4	$(-\infty;-6)\cup$ $\cup(6;+\infty)$	3	4	$\left[-\frac{7}{9};\frac{1}{3}\right)$
4	$(-\infty;\frac{1}{3})\cup$ $\cup(2;+\infty)$	$[-7;-4)$	4	$-3;\ -2;$ $-1;\ 0;\ 1$	$(-\infty;2]\cup$ $\cup[3;+\infty)$	$(-7;+\infty)$	2	$\left[-4;5\frac{1}{3}\right]$
5	$(-4;1)$	4	3	-4	$(-\infty;-5]\cup$ $\cup[2;+\infty)$	2	$[-4;8]$	$(-5;2{,}5]$
6	$(-7;7)$	3	4	6	2	2	$[0;\sqrt{5}]$	$[-5;0]$

§ 14. Числовые последовательности. Арифметическая и геометрическая прогрессии

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	2	3	3	15	−300	31,75	3
2	3	82	4	−2	0,5	22	207	2
3	1	31	4	−0,5	11	2	117	4
4	4	4	3	12	3	225	−270	23
5	6	381	3	8	3	13	−81	55
6	3	−72	2	−12	−2,4	6	20	25

§ 15. Исследование функции и построение графика

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	3	$a > 0$; $c < 0$	1	3	2	А – 3; Б – 2; В – 1
2	2	А – 1; Б – 3; В – 2	1	$(-3; -1) \cup (1; 4]$	3	−4	1	А – 4; Б – 3; В – 1; Г – 2
3	1	А – 1; Б – 4; В – 2; Г – 3	4	$(-3; -1) \cup (2; 4]$	1	−12	2	А – 3; Б – 4; В – 1
4	4	А – 3; Б – 1; В – 4; Г – 2	2	3	2	3	−7	А – 4; Б – 1; В – 2
5	3	А – 1; Б – 3; В – 2	4	3	1	3	1	А – 4; Б – 1; В – 2
6	2	А – 3; Б – 1; В – 2	1	$[-1; 3]$	−2	2	6	2

§ 16. Представление данных в виде таблиц, диаграмм и графиков

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	а) 20; б) 18; в) 50	2	1	А, 30	11	1,5	A, 10
2	2	3	А = 2; Б = 28; В = 88	2	0,5 с; 22 м; 3,5 с	10	I; 1	II, 10
3	1	а)2; б)9; в)5	2	208	1; 50; 150	3	Б, 5	A, 300
4	8; 2; 0	а) 2 с; б) 35 м; в) 5 с	4	3	а) 10; б) 0,1; в) 40%	4	0	y, 2
5	2	а) 50 км/ч; б) 5; в) 100 км/ч	73	13	а) 87,5%; б) $\frac{1}{3}$; в) 1	3	1	75 км/ч
6	2	а) 200 км; б) 4 ч; в) 0	4	2	1991 – 1992	1	3	N, 150

§ 17. Составление математической модели по условию задачи

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	4	1	3	3	1	15	4
2	3	3	3	2400	3	1	20	4
3	3	1	2	11	2	16; 36	2	24
4	2	2	4	4	1	1	4	3
5	1	4	4	2	1	3	2	4
6	11	4	4	150	3	20; 25	4	2,4

§ 18. Текстовые задачи

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	90	3	57	87,5	75; 25	500	30; 20	48
2	8; 12	3	$22 + 3k$	36	35	80	12; 24	48
3	4; 9	30	36	4; 16	2; 3	14	80; 96	100
4	9	40	20	52	7	9	70	100
5	40	48	25	45	40	2	$\frac{24}{7}$	7
6	78	3	780	50	1 : 3	10	30 и 25	4

§ 19. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	170	380	0,3	0,2	0,02	3	2	2
2	440	720	0,54	0,91	0,25	1	3	6
3	450	4	0,08	0,3	0,75	3	13	3
4	36	5	0,6	0,62	0,5	2	23	3
5	6	231	0,5	2	0,3456	5	2	1
6	24	7140	0,95	0,018	0,0576	2	4	3

§ 20. Алгебраические уравнения и системы нелинейных уравнений

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$-1;\ 2$	$\pm\sqrt{2}, \pm 2, \pm 2\sqrt{2}$	3	4	$0;\ 16$	$\frac{x+3}{x-1}$	$\pm\sqrt{2};\ \pm 1$	$(0{,}6; -1{,}4)$; $(0{,}4; -1{,}6)$
2	$-1;\ -2$	$\frac{(x-2)(2x+3)}{x+1}$	4	4	-4	$-1;\ -\frac{3}{5};\ 1$	$(-3; 5),\ (5; -7)$	$(-5; 2), (2; 5)$
3	$1; 2; -3$	$x^2 - x + 1$	1	-1	$-2;\ 9$	$0;\ 2{,}5$	решений нет	$(2; 3; 5)$, $(-2; -3; -5)$
4	$1; 3; -2$	$x^2 + x + 1 - \frac{4x+5}{x^2+1}$	1	4	$-2;\ 4$	$(18; 8)$	$(1; -2), (-1; 2)$, $(-2; 1), (2; -1)$	$(3; 3)$; $(-3; -3)$
5	$-3; 3$	$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	3	1	-2	$-4; 3$	$\left(12 - 3\sqrt{7};\ \frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$	$(2; 5; 6)$, $(-2; -5; -6)$
6	$1;\ -3$	$x^2 - 7x + 12$	3	2	$2;\ 9$	-7	$-2;\ 2$	$(1; 1), (-1; -1)$

§ 21. Решение иррациональных уравнений и уравнений, содержащих неизвестное под знаком модуля

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	0,8	3	3	5	1	0; 1; 2	−2
2	5	3	3	6	−1,6	1	−2; 0; 2	−1
3	15	4	29	16	−4; −0,8	4	$-\sqrt{5}; \sqrt{5}$	12
4	2	3	4	−3	−4; 2	5,6	1	2
5	−1	2,5	22	−1	$\frac{1}{13}; 1$	−9	−2	2
6	7	3	1	3	1	4	−45	−9

§ 22. Задания, содержащие параметр

Вар. №	Номер задания				
	1	2	3	4	5
1	−5	$(-\infty; 0)$	−9; −8; 16	4	$(-3; 2)$
2	$(-\infty; 1)$	2	−7; −16	$(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$	$(-\infty; 12) \cup (14; +\infty)$
3	1	$(3{,}125; +\infty)$	4	± 8	$(2; 4)$
4	0	$(-3; 7)$	$(-\infty; -4) \cup (-4; 4)$	8	−1; 0; 1; 2; 3
5	$[0; +\infty)$	1; 9	± 6	2; 6	$[-1; 3]$
6	$(-\infty; 3)$	$(-1; 0]$	$\{0\} \cup [9; +\infty)$	0; 1	$(-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$

§ 23. Геометрия. Базовый уровень

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	40	3	84	42	55	12	560	5
2	20	1-А, 2-А, 3-В	112,5	20,5	112,5	9	52	12
3	90	2	6	35	80	45	10	14
4	50	3	11	24	95	2	2000	3
5	105	3	4	60	60	105	5	9
6	160	1, 4	20	172	121	272	120	18

§ 24. Геометрия. Профильный уровень

Вар. №	Номер задания				
	1	2	3	4	5
1		0,25	4	1,5	8
2		12	14	2	3
3		2	14	30	0,75
4		20	3	8	49
5		10	30	40	6
6		25	66	20	17

Решение заданий № 1 из § 24. Геометрия

Вариант 1

Доказательство:

1) $\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные (см. рис. 240).

2) $\angle ABC = \angle BCD$ как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей BC.

3) $\triangle AOB = \triangle COD$ по второму признаку равенства треугольников ($OB = OC$, $\angle DOC = \angle BOA$, $\angle ABO = \angle OCD$).

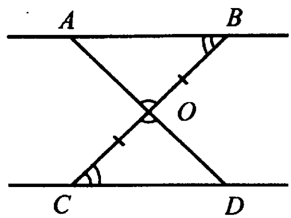


Рис. 240

Вариант 2

Доказательство:

$\triangle ABN = \triangle CBM$ (см. рис. 241) по первому признаку равенства треугольников ($BN = BM$, $BC = BA$, $\angle B$ — общий), а значит, $AN = CM$.

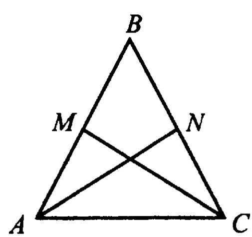


Рис. 241

Вариант 3

Доказательство:

Известно, что $AB \perp CD$, $AO = OB$, $CO = OD$ (см. рис. 242).

$\triangle AOC = \triangle BOD$ по первому признаку равенству треугольников ($AO = OB$, $CO = OD$, $\angle COA = \angle BOD$). Аналогично $\triangle COB = \triangle AOD$.

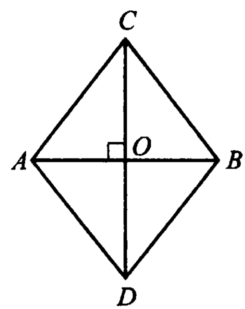


Рис. 242

$\triangle AOC = \triangle COB$ по первому признаку равенства треугольников
($\angle AOC = \angle COB$, OC — общая сторона, $AO = OB$).
Значит, $\triangle AOC = \triangle OCB = \triangle AOD = \triangle BOD$, а потому $AC = BC = AD = BD$, то есть $ABCD$ — ромб.

Вариант 4

Доказательство:
$\triangle ABM = \triangle MCD$ по первому признаку равенства треугольников ($BM = MC$, $CD = AB$, $\angle ABM = \angle MCD$), значит, $AM = MD$.

Вариант 5

Доказательство:
Заметим, что $\triangle BMK \sim \triangle BAC$, так как $\angle B$ — общий, а $\frac{BM}{BA} = \frac{BK}{BC}$, значит, $\angle MKB = \angle ACB$, и прямые MK и AC параллельны.

Вариант 6

Доказательство:
$\triangle MNK \sim \triangle ABC$, так как все его стороны пропорциональны сторонам треугольника ABC с коэффициентом $\frac{1}{2}$ как средние линии. Значит, все углы равны.

Литература

1. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (Приказ Минобрнауки РФ от 17.12.2010 г. №1897).
2. *Макарычев Ю. Н. и др.* Алгебра. 9 класс.: учеб. для шк. с углубл. изуч. математики. — М.: Мнемозина, 2010.
3. *Алимов Ш. А. и др.* Алгебра: учеб. для 9 кл. общеобразоват. учреждений. — М.: Просвещение, 2010.
4. *Мордкович А. Г. и др.* Алгебра. 9 класс. — М.: Мнемозина, 2010.
5. *Смирнов В. А., Смирнова И. М.* Геометрия. 7 – 9 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений. — М.: Мнемозина, 2010.
6. Математика. 9-й класс. Подготовка к ГИА-2015 / Под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион, 2014.
7. *Прокофьев А. А.* Задачи с параметрами. — М.: МИЭТ, 2004.
8. Спецификация экзаменационной работы по алгебре государственной (итоговой) аттестации выпускников IX классов общеобразовательных учреждений (в новой форме) 2014 г. [Электронный ресурс]. — Москва: ФИПИ, 2013. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.

ГИА-9

Учебное издание

Лысенко Федор Федорович
Кулабухов Сергей Юрьевич
Дерезин Святослав Викторович
Евич Людмила Николаевна
Ольховая Людмила Сергеевна
Коннова Елена Генриевна
Ханин Дмитрий Игоревич

МАТЕМАТИКА. 9 КЛАСС.
ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ГИА-2015.
Алгебра, геометрия, теория вероятностей и статистика

Под редакцией ***Ф. Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова***

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка *В. Кириченко*
Компьютерная верстка *Г. Безуглова*
Корректор *Л. Андрецова*

Подписано в печать с оригинал-макета 21.07.2014.
Формат 60x84$^1/_{16}$. Бумага типографская.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 18,6.
Тираж 15000 экз. Заказ № 968.

Издательство ООО «Легион» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009, зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987.

ООО «ЛЕГИОН»
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции: 344082, г. Ростов-на-Дону, ул. Согласия, 7.
www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано с оригинал-макета издательства
в ОАО «Областная типография «Печатный двор».
432049, г. Ульяновск, ул. Пушкарева, 27.